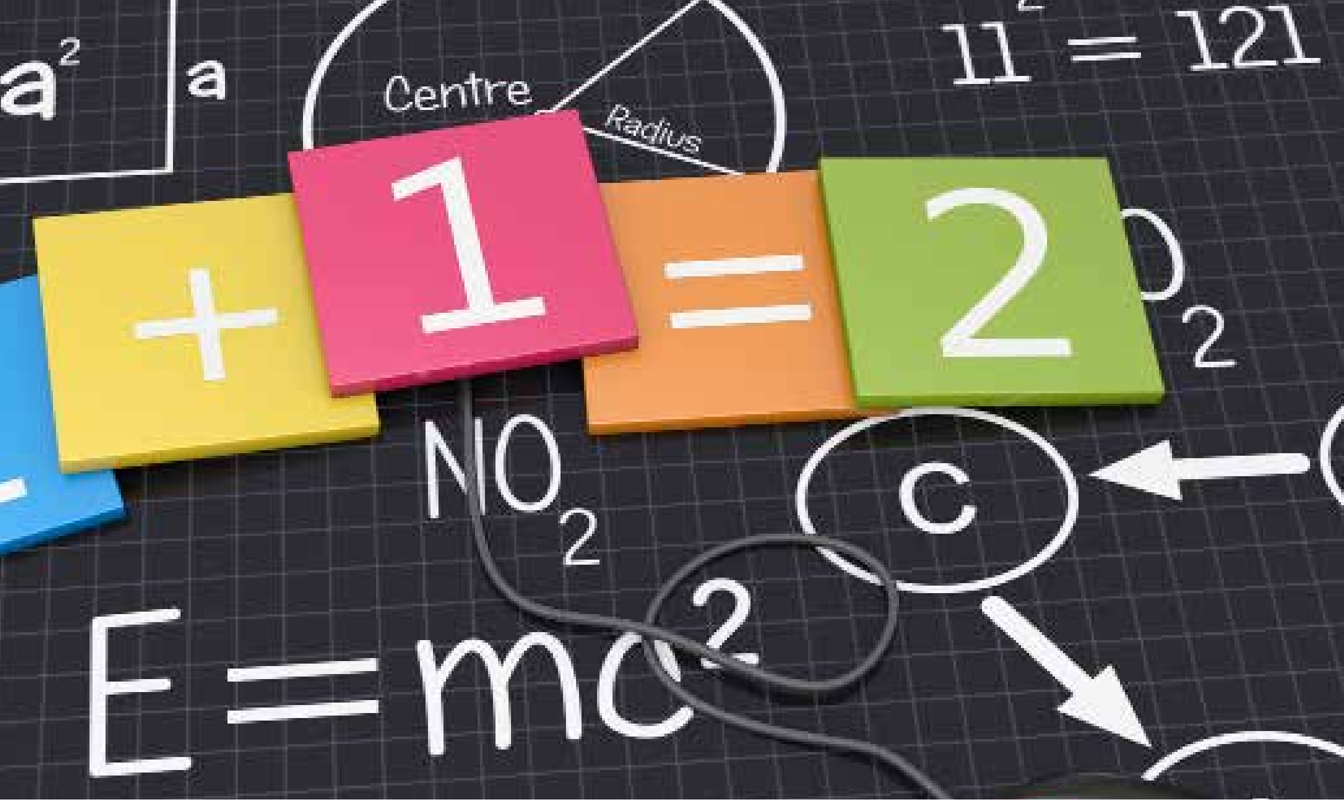
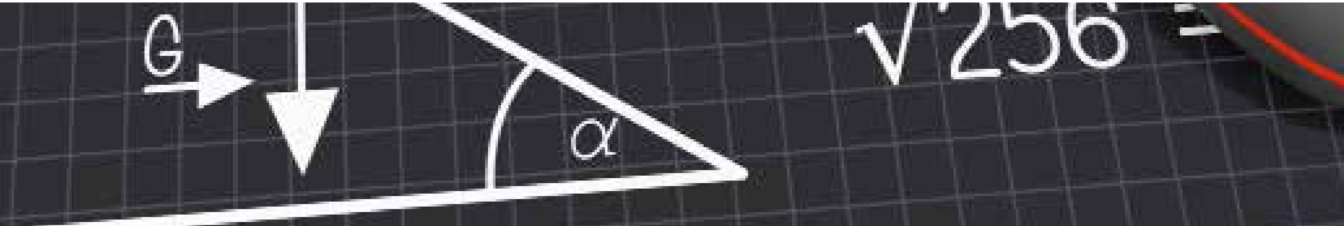


PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

Por: Juan Piloña • Palabras 2,345

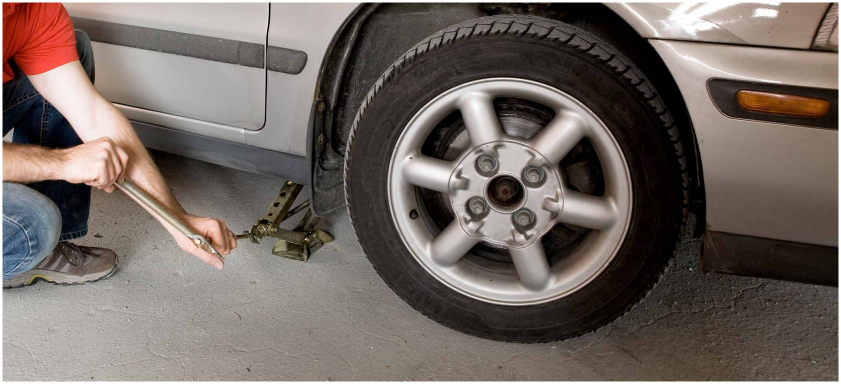


Hoy salimos de paseo con los papás de Lunático, bueno....hoy lo voy a llamar Andrés, después de todo, hoy soy su invitada. Me invitaron a ir a Mixco Viejo, ni siquiera sabía que existía ese lugar. Mi mamá dijo que era un paseo educativo y me dio permiso para ir.

El papá de Andrés nos explicó que Mixco Viejo fue la capital de los mayas poqoman. Su máximo esplendor fue alcanzado en el Período Post Clásico.
Se calcula que su población rebasó los 10,000 habitantes. En total hay como unas 120 construcciones, la mayoría en buen estado.
Hay algunas que lucen casi como en sus mejores tiempos. Impresionan a primera vista.

Pasamos un día precioso. ¡Qué emoción hay dos campos de juego de pelota y una gran muralla de piedra que rodea a toda la ciudad! Nos enteramos que esa muralla fue construida para proteger a la ciudad. A los españoles les costó conquistarla y cuando lo hicieron.... la quemaron.

De regreso íbamos en el carro, cantando a todo pulmón....”Y es tanta mi fe que aunque no tengo jardín ya compré una podadora”.....cuando empezamos a oír un ruido extraño y el carro se detuvo moviéndose en forma extraña.
Se había pinchado una llanta!!



A partir de allí, los hombres se encargaron de todo. Sacaron un montón de herramientas del baúl del carro y como dijo Andrés tuvieron que “hacer palanca” para quitar la llanta.

En el viaje de regreso Andrés se volvió Lunático y empezó a hablar del torque, que hizo palanca para cambiar la llanta del carro. A veces de verdad pienso que este amigo llegó de otro planeta. Le supliqué que me dejara dormir, pero dijo que tenía que explicarme otras operaciones que pueden hacerse con vectores.

Que tal vez de momento no iba a entender para qué servían, que era igual que Ricardo Arjona, que ya tiene la podadora y todavía no tiene el jardín.

Me pidió que confiara en él, que cuando veamos todo eso de cómo funcionan las palancas y los campos magnéticos...simplemente voy a aplicar lo que va a enseñarme y me voy a reír de la vida.

Recuerda

Ya lo hemos visto, recordemos...

Un escalar es un tipo de magnitud física que se expresa por un solo número y tiene el mismo valor para todos. Por ejemplo, la temperatura de un cuerpo se expresa con una magnitud escalar.

ADEMAS

Las magnitudes vectoriales, se representan mediante vectores, es decir que además de un módulo (o valor absoluto) tienen una dirección y un sentido. Ejemplos de magnitudes vectoriales son la velocidad y la fuerza.

En este libro veremos lo qué pasa cuando multiplicamos un escalar por un vector, el producto escalar o producto punto y finalmente, el producto vectorial.

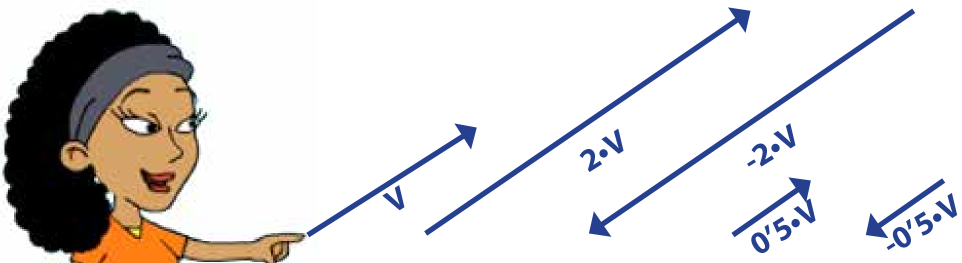
Multiplicación de un escalar por un vector

Como lo platicamos, se debe comparar pera con pera y manzana con manzana.

Un número y un vector no pueden sumarse (sólo pueden sumarse cosas iguales) pero sí se pueden multiplicar creando una nueva operación: el producto de un número por un vector: $\alpha \cdot \mathbf{v}$ (las letras griegas las usaremos para indicar números (escalares o coeficientes) y las letras en negrilla para los vectores).

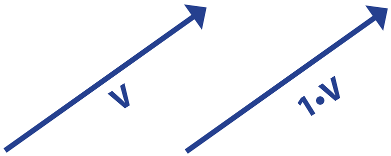
El producto de un número por un vector, es otro vector con la misma dirección que el vector original, con el mismo sentido, si el número es positivo; o sentido opuesto, si el número es negativo, y cuyo módulo será tantas veces el módulo del vector primero como indique el número por el que se multiplique.

Si multiplicamos un vector por 2.5, el vector resultante será dos veces y media el vector original. Si multiplicamos por -0.5, el resultado será la mitad de largo y apuntará en sentido opuesto.



Multiplicar un número por un vector es cambiar su tamaño según su número y, cuando el número es negativo, cambiar su sentido.

Igual que la suma de vectores, multiplicar un número y un vector también tiene propiedades:
$1\cdot\mathbf{v} = v$. Si multiplicamos el número 1, el vector no se modifica.



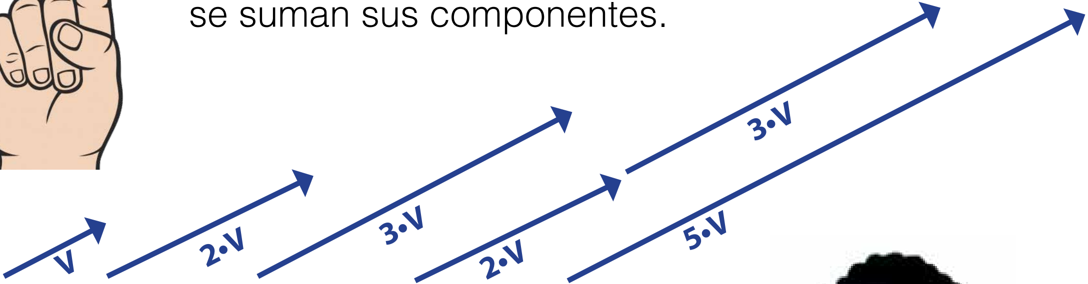
Recuerda que al multiplicar por el número 1, el vector no cambia. Sigue siendo el mismo.

$(\alpha + \beta)\cdot v = \alpha\cdot\mathbf{v} + \beta\cdot\mathbf{v}$. Al multiplicar una suma de números por un vector, podemos, en primer lugar, multiplicar cada número por el vector y, después, sumar los vectores resultantes.

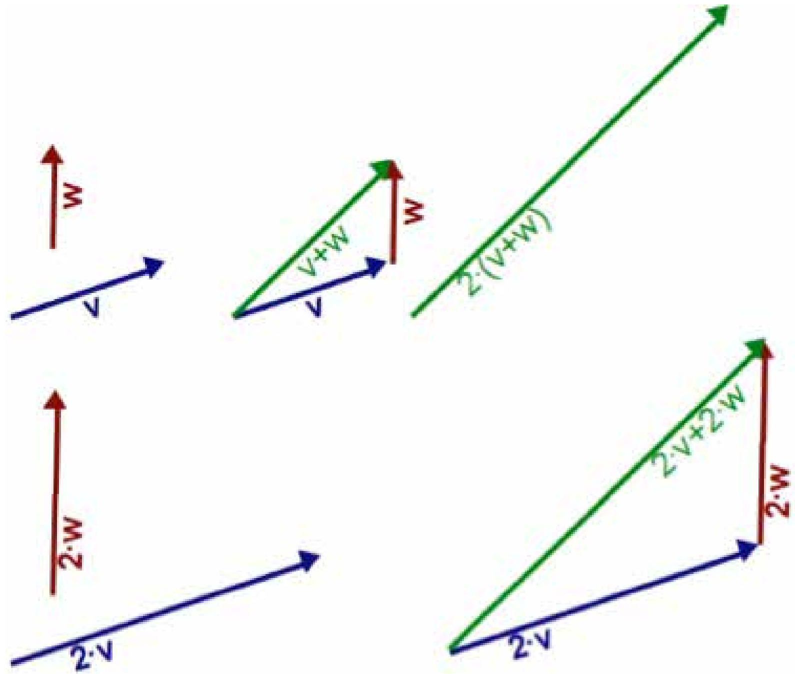
Aunque hemos empleado el mismo símbolo (+), las operaciones que aparecen a ambos lados de la igualdad no son iguales. A la izquierda estamos sumando dos números (3+5; 9+17, etc.).

A la derecha estamos sumando vectores.

Recuerda que para sumar vectores, se suman sus componentes.

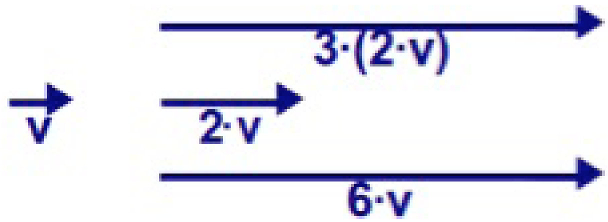


Es lo mismo sumar primero los números y multiplicar el resultado por el vector que multiplicar cada número por el vector y sumar los vectores resultantes.



Es lo mismo sumar dos vectores y multiplicar la suma por un número que multiplicar cada vector por el número y sumar los vectores resultantes.

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\ \beta \cdot \mathbf{v})$. Multiplicar el producto de dos números por un vector da el mismo resultado que multiplicar secuencialmente los números por el vector. Como ocurría antes, el primer producto entre α y β es una multiplicación entre dos números, mientras que el producto entre β y v es una operación diferente: la multiplicación entre un número y un vector. Se representan mediante el mismo símbolo, pero indica operaciones diferentes. Recuerda lo de los componentes.



Es posible multiplicar secuencialmente un producto de dos números por un vector.

Al multiplicar el número cero por cualquier vector se obtiene el vector **0** ($0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$) y que al multiplicar cualquier número por el vector **0** también se obtiene el vector **0** ($\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$).

Ejemplo

$\vec{u} = (-2, 5)$ $\vec{v} = (-3,-1)$

$\vec{u} = (-2,-5)$

Recuerda que al escribir un vector se usan sus componentes en “x” y en “y”. Así, en el vector u, su componente en “x” es -2 y su componente en “y” es 5.

$3 \cdot \vec{v} = (9,-3)$ El mismo vector ampliado 3 veces con igual dirección y sentido.

$-4 \,.\, \vec{u} = (8, -20)$ el mismo vector ampliado 4 veces, con la misma dirección y diferente sentido.

Al contrario que los escalares, los vectores pueden multiplicarse de dos maneras diferentes: producto escalar y producto vectorial.

El producto escalar es la operación de multiplicar dos vectores cuyo resultado deja de ser un vector: el producto se transforma en un escalar (un número, más su unidad de medida, si correspondiera).

El producto vectorial es una operación diferente a la anterior, y el resultado es un nuevo vector.

Producto Escalar

El producto escalar también es conocido como producto interno, producto interior o producto punto, siendo este último, uno de los más conocidos. Tal y como lo mencionamos anteriormente, el producto escalar es una operación entre vectores de un mismo espacio o plano.

Cuando hablamos de un plano es justo como la palabra lo indica....todo lo que puedas imaginar en forma plana, sin tomar en cuenta su profundidad o grosor. Por ejemplo la pared que está frente a tí, el tablero del escritorio, la página de un cuaderno. Todo aquello que puedas dimensionar en **x** y en **y**. En este caso, se dice que estamos en R2, o sea en el espacio de dos dimensiones.

El resultado de esta operación es un número o escalar.
¿Cómo se obtiene?

Sencillo: calculas el módulo de cada vector. Multiplicas los dos módulos. Multiplicas el producto obtenido por el coseno del ángulo entre los dos vectores.

No te asustes, ahora vamos a ver un ejemplo.

Recuerda

Para obtener el módulo de un vector: se eleva al cuadrado el componente en **x**, se eleva al cuadrado el componente en **y**, se suman los dos cuadrados y a la suma se le saca la raíz cuadrada

$$\textbf{Módulo de } \vec{U} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Expresión analítica del módulo de un vector

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 - u_2} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}}$$

Ejemplo de cálculo del módulo

$\vec{u} = (3, 0) \qquad \vec{v} = (5, 5)$
$\lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{3 \cdot 3 + 0 \cdot 0} = 3$
$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{5 \cdot 5 + 5 \cdot 5} = 5\sqrt{2}$

Se toma el vector.
Se eleva al cuadrado su componente en “x”.
Se eleva al cuadrado su componente en “y”.
El resultado de ambos cuadrados se suma.
Al resultado de la suma se le saca la raíz cuadrada.

Ahora sí, miremos el ejemplo: el producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$ Se aplica cuando conoces el ángulo entre los vectores.

Ejemplo

$$\vec{u} = (3, 0) \qquad \vec{v} = (5, 5) \qquad \widehat{uv} = 45^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} \cdot \cos 45^\circ = 11.03$$

- En el caso anterior, se conoce el ángulo entre los dos vectores. Se calcula la magnitud de cada vector.
- Para calcular la magnitud, cada componente del vector se eleva al cuadrado.
- Los dos cuadrados se suman y se calcula la raíz cuadrada.
- Cuando ya tienes la magnitud de los vectores, se multiplican entre sí y después, por el coseno del ángulo.

Expresión analítica del producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Se aplica cuando solo conoces sus componentes.

Ejemplo:

$\vec{u} = (3, 0)$ $\quad$ $\vec{v} = (5, 5)$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 15$

- Se multiplica el componente en “x” de u, por el componente en “x” de v.
- Se multiplica el componente en “y” de u, por el componente en “y” de v.
- El producto de ambas multiplicaciones se suma y ese es el resultado.

Propiedades del producto escalar

Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto. No importa en qué orden los operes, vas a obtener el mismo resultado.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Asociativa: No importa en qué forma agrupes las multiplicaciones, de cualquier forma te va a dar el mismo resultado.

$$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (k \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

Distributiva: Puedes operar de primero lo que está en el paréntesis y el resultado multiplicarlo por lo de afuera. O hacer la multiplicación por cada miembro y después sumarlos. De cualquier forma obtendrás el mismo resultado.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Positividad del producto escalar: Si estás operando por un vector que no es cero, entonces el producto que vas a obtener es mayor que el vector original.

$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$

Ejercicios

Calcular el producto escalar de los siguientes vectores:

1. $\vec{U} = (3, 4)$ y $\vec{V} = (-8, 6)$

   $\vec{U} \cdot \vec{V} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$
2. $\vec{U} = (5, 6)$ y $\vec{V} = (-1, 4)$

   $\vec{U} \cdot \vec{V} = 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 = 19$
3. $\vec{U} = (3, 5)$ y $\vec{V} = (-1, 6)$

   $\vec{U} \cdot \vec{V} = 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 6 = 27$
4. $\vec{a}=(2,0)$ $\quad\quad$ $\vec{b}=(-3, -1)$

   $\vec{a} \,.\vec{b}=2\ (-3)+ 0\ (-1),= -6,-1)-6$

   $\vec{b} \,.\vec{a} = -3(2)+ (-1)(0)= -6$

Propiedad conmutativa

5. $\vec{a}=(2,1)$ $\qquad\qquad$ $\vec{b}=(3,-2)$ $\qquad\qquad$ $k = 2$

$$k\ .(\vec{a}.\vec{b})=2\ (2x3+1x-2)=2\ (4)=8$$

$$(k\ .\vec{a}).\vec{b}=(2\ .(2,1).(3,-2)$$

$$=(4,2).(3,-2)=4(3)+2(-2)$$

$$=12-4=8$$

Propiedad asociativa

$$\vec{u}(\vec{v}+w)=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,w$$

$$(1,2).(3-1,4-2)=(1x3+2x4)+(1(-1)+2(-2))$$

$$(1,2)(2,2)=(11)+(-5)$$

$$1(2)+2(2)=6,$$

$$6=6$$

Cápsula informativa

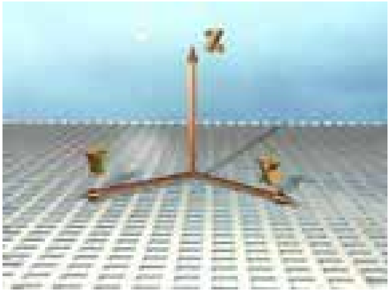
El producto cruz también se llama el producto vectorial o producto vectorial de Gibbs. El nombre de Gibbs es después Josiah Willard Gibbs, quien alrededor de 1881 introdujo tanto el producto escalar y el producto vectorial, utilizando un punto y una cruz para designarlos.

Para enfatizar el hecho de que el resultado de un producto de punto es un escalar, mientras que el resultado de un producto vectorial es un vector, Gibbs también introdujo el nombre alternativo producto escalar y producto vectorial de las dos operaciones. Estos nombres alternativos siguen siendo ampliamente utilizados en la literatura.

Producto Vectorial

El producto cruz entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, denotado como $\vec{A} \times \vec{B}$, se lee A cruz B; da como resultado otro vector. Este vector tiene una magnitud definida como el producto entre las magnitudes A, B de los vectores y el seno del ángulo Θ que forman entre sí.

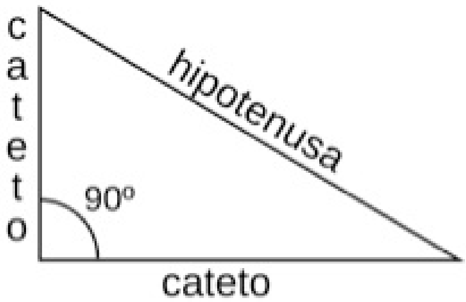
El producto vectorial o producto cruz ocurre en el espacio trimensional, o sea cuando consideramos tres dimensiones. Las dimensiones a considerar son alto, ancho y profundidad. Observa que ahora vamos a trabajar en R3, en donde tendremos x, y, z



$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \operatorname{Sen} \Theta$$

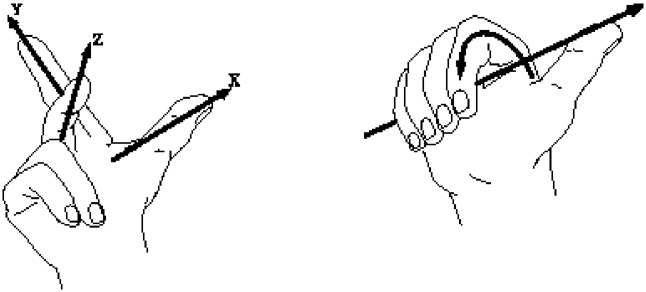
Se aplica cuando conoces el ángulo entre los vectores.

El producto cruz relaciona los catetos opuestos de los triángulos rectángulos con las hipotenusas de dichos triángulos.



La dirección de A x B, o sea el nuevo vector, es perpendicular al plano formado por A y B. Es por eso que se trabaja en R3, tres dimensiones. El sentido del nuevo vector está determinado por el avance de un tornillo de rosca derecha cuando se gira un ángulo θ desde A hasta B. Imagina que estás enroscando un tornillo.

Una regla más conveniente que puede usarse para determinar la dirección de A x B es la regla de la mano derecha.



Los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de A y luego “se enrollan” hacia B un ángulo θ. La dirección del pulgar derecho levantado representa la dirección de A x B.

Debido a la notación, A x B a menudo se lee “A cruz B”. De ahí el término producto cruz.

Propiedades del producto vectorial

1. A diferencia del producto escalar, el orden en el cual se multiplican los dos vectores en un producto cruz es importante, esto es, A x B = -(B x A)

En consecuencia, si se cambia el orden del producto cruz, debe cambiar el signo.

Esta relación se puede verificar fácilmente con la regla de la mano derecha. Es decir el producto cruz no es conmutativo.

2. Si el vector A es paralelo al vector B ($\theta = 0°$ ó $180°$); entonces $A \times B = 0$; por lo que $A \times A = 0$.

3. Si A es perpendicular a B, entonces $|A \times B| = AB$.

4. El producto vectorial obedece a la ley distributiva, es decir,

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.

Cuando no se conoce el ángulo entre los vectores, el producto vectorial o producto cruz se opera usando determinantes. Por el momento no vamos a trabajar aplicaciones de este tema, por lo que cuando lo hagamos, explicaremos la forma de hacerlo.

Glosario

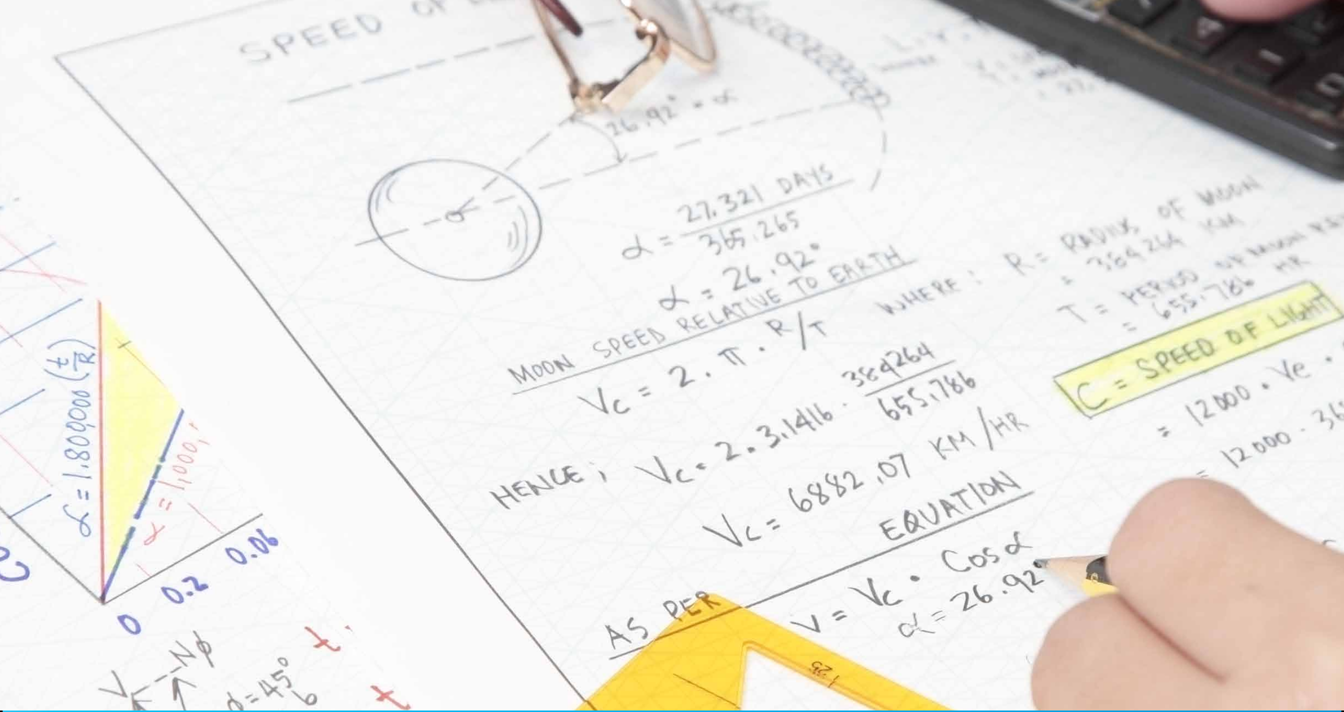
Escalar. Tipo de magnitud física que se expresa por un solo número y tiene el mismo valor para todos.

Euclidiano. Relativo al método de este matemático griego del siglo III a. C.

Josiah Willard Gibbs. Nacido el 11 de febrero de 1839 en New Haven: Connecticut, Estados Unidos, fue un físico estadounidense que contribuyó de forma destacada a la fundación teórica de la termodinámica.

Nulo. Refiere a algo falto de fuerza o valor para tener efecto.

Vector. Segmento que además de longitud, posee dirección y sentido. Los vectores se representan por flechas, y se nombran con una letra con una flecha en su parte superior, o con las letras de su punto inicio y origen, con una flecha en su parte superior.



Por: Juan Piloña
Palabras: 2,345
Imágenes: Depositphotos

Fuentes:

Domínguez Muro, Mariano. Universidad de Salamanca. Ediciones Universidad Salamanca. ed. Trigonom etría activa: 2 BUP (1985). ISBN 978-84-7800-056-2.
http://www.history.mcs.standrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html
Libro Boyer, Carl Benjamin (1991). A “History of Mathematics” (2da. edición). John Wiley & Sons, Inc.. ISBN 0471543977.
O´Connor, John J.; Robertson, Edmund F. (1996), «Trigonometric functions» (en inglés), MacTutor History of Mathematics archive, Universidad de Saint Andrews,