Método Analítico

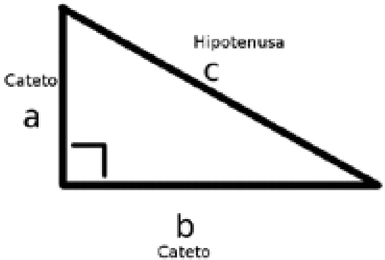
Por: Juan Piloña

ÍNDICE

Suma de Vectores por el Método Analítico

Para la suma de **vectores** por el método analítico se utilizan las siguientes herramientas que tú ya conoces:

1. Teorema de Pitágoras



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

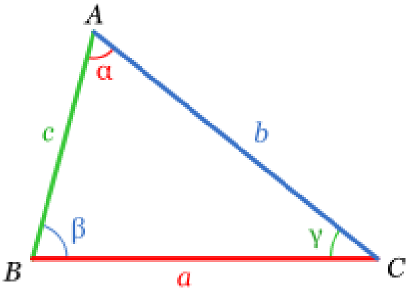
//

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

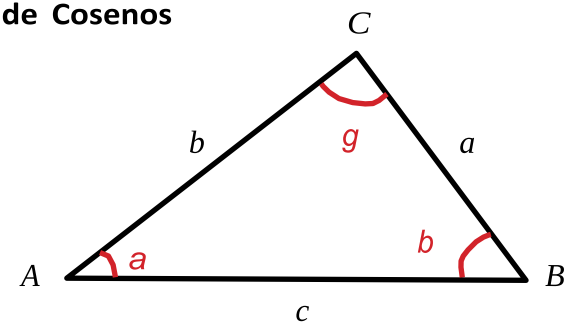
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

2. Ley de Senos



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

3. Ley de Cosenos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\text{sen } a$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos b$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos g$$

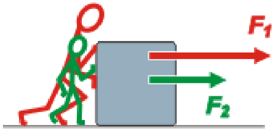
Estas son las herramientas utilizadas para resolver triángulos. Si has olvidado cómo utilizarlas, deberás volver a ver los videos de matemática sobre estos temas.

Para sumar **vectores** por medio del análisis matemático, se suman directamente las magnitudes, solo si son paralelos y de igual sentido.

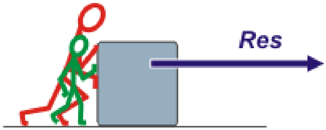
Ejemplo:

Dados los **vectores**:

A = 4 m/s en sentido X y el vector C = 6 m/s en sentido de X, calcular la suma de los vectores A y C.



En la figura suponer que F_1 es el **vector** C y F_2 es el vector A, entonces tienen la misma dirección y sentido.

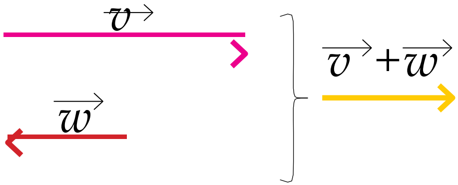


Solución:

Como A y C tienen igual sentido, A + C = 4 + 6 = 10 m/s en sentido de X.

Otro ejemplo

Dados los **vectores** A = 4 m/s en sentido -X y el vector C = 6 m/s en sentido de X. calcular la suma A + C.



En la figura, sea A igual al vector w y C igual al vector v. Tienen la misma dirección, pero sentidos opuestos, entonces,

Solución:

Como A y C tienen diferente sentido, A + C = -4 + 6 = 2 m/s en sentido de X.

Antes de seguir adelante, necesitamos reforzar el concepto de componentes de un vector y cómo esos componentes afectan el movimiento o el resultado.

Quiero ponerte un ejemplo sencillo y tal vez un poco ingenuo. Tú eres una persona, una mezcla perfecta de genes. Tus componentes son los genes de tu padre y de tu madre.

Algunos dicen que tu hermano es exactamente igual a tu padre. Probablemente en tu hermano dominaron los genes paternos. Otros dicen que tu hermana es igualita a tu madre. Probablemente podríamos pensar que en ella dominaron los genes maternos.

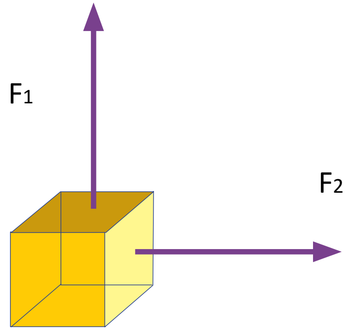
Y finalmente tú.... quizá algunos dicen que te pareces a los dos. En ese caso, como lo dije antes: tú eres la mezcla perfecta de genes maternos y paternos.

¿Y qué tiene que ver toda esta historia de los genes con los componentes de los vectores?

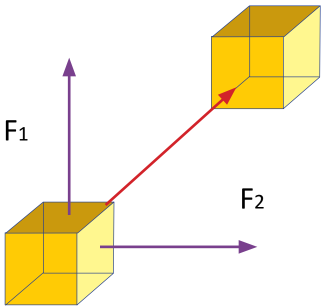
Es una analogía muy simplista para que comprendas cómo funcionan los componentes de un vector. Vamos a suponer que los genes maternos son los componentes en “x” y los genes paternos, los componentes en “y”.

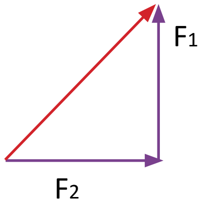
En ese contexto, tu hermano (igual a tu padre) tendría sus componentes en “y”. Tu hermana (igual a tu madre) tendría sus componentes en “x”. Tú, no estarías ni en el eje “x”, ni sobre el eje “y”, estarías justo en medio de los dos ejes, porque eres una mezcla de los dos.

Ahora, pasemos a la parte matemática.
Una forma de demostrar la suma de vectores, es imaginarse una caja a la que se aplican dos **fuerzas** F_1 y F_2 de igual magnitud, una hacia el norte y otra hacia el este, respectivamente.

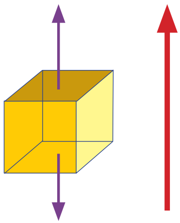


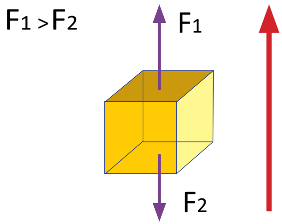
Obviamente, la caja se mueve en dirección noreste. Para hacer un análisis más formal, se deben sumar los vectores **fuerza**, utilizando el método gráfico explicado anteriormente.

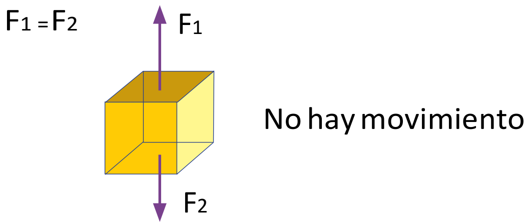




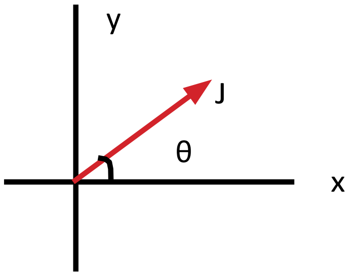
La flecha roja indica la dirección en que se mueve la caja: considerando ahora que F_2 se aplica en sentido sur, con los siguientes parámetros. En cada uno de ellos la flecha roja indica el sentido del movimiento.





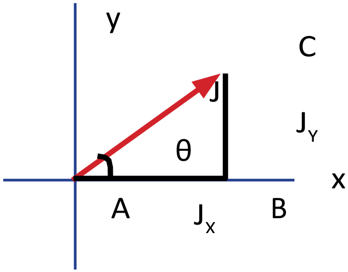


Continuemos con la suma de vectores, cuando su dirección y sentido son diferentes. En este caso se deben definir los componentes del vector. Consideremos un vector J, cuya parte inicial coincide con el origen y forma un ángulo con el eje X positivo.



Si se une cada eje por medio de una línea perpendicular desde el final del vector, se forma un triángulo ABC, en donde el lado AB es la componente en X (Jx) del vector, y el lado BC es la componente en Y (Jy) del vector.
Le hemos llamado J al vector y por eso sus componentes se identifican

con esa letra. Los subíndices x y y corresponden al eje “x” y “y” respectivamente. Si el vector fuera M o A, sus componentes serían Mx y My.



Recuerda

SOHCAHTOA es una palabra mágica para ayudarte a recordar las definiciones de las funciones trigonométricas.

- **SOH** significa que el seno = cateto opuesto / hipotenusa.
- **CAH** significa que el coseno = cateto adyacente / hipotenusa.
- **TOA** significa que la tangente = cateto opuesto / cateto adyacente.

Analizando la anterior gráfica y aplicando la definición de las funciones trigonométricas se obtiene:

$$\text{sen } \theta = \frac{J_Y}{J}$$

$$\cos \theta = \frac{J_X}{J}$$

$$\tan \theta = \frac{J_Y}{J_X}$$

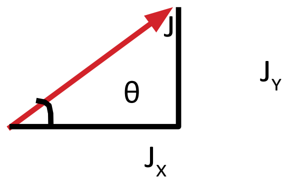
Entonces:

$$J_Y = J \text{ sen } \vartheta$$

$$J_x = J \cos \vartheta$$

$$\vartheta = \tan^{-J} \frac{J_Y}{J_X} \quad o \text{ arcotan } \frac{J_Y}{J_X}$$

Otra expresión útil, para encontrar la magnitud del vector J, se obtiene a partir de la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo de la anterior gráfica:



$$|J| = \sqrt{(J_x)^{2} = (J_y)^{2}}$$

Las barras de la J, representan que es la magnitud del vector J.

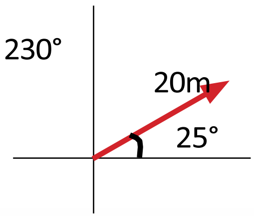
Una vez obtenidas las componentes de los vectores a sumar, se deben sumar todas las componentes en X, y luego todas las componentes en Y de los vectores, estos resultados son las componentes del vector resultante.

Para obtener la magnitud de este vector, se debe aplicar el Teorema de Pitágoras, teniendo como catetos las componentes del vector resultante.

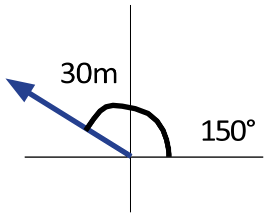
Ejercicio resuelto:

Hallar las componentes de los vectores A, B y C, utilizados en el ejercicio de suma por el método gráfico, y luego calcular los valores de las magnitudes de los vectores suma, resueltos gráficamente:

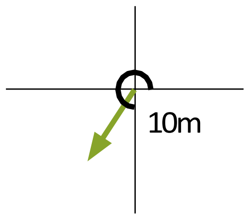
Vector **A**



Vector **B**



Vector **C**



Las componentes para el vector A:

$$A_y = A sen\vartheta \qquad A_y = 20 sen 25° \qquad A_y = 8.45m$$
$$A_x = A cos\vartheta \qquad A_x = 20 cos 25° \qquad A_x = 18.12m$$

Ahora, calcular las componentes para el vector B y C, siguiendo el mismo procedimiento.

Para B:

$$B_y = B sen\vartheta \qquad B_y = 30 sen 150° \qquad B_y = 15m$$
$$B_x = B cos\vartheta \qquad B_x = 30 cos 150° \qquad B_x = -25.9m$$

Y para C:

$$C_y = A sen\vartheta \qquad C_y = 10 sen 230° \qquad C_y = -7.66m$$
$$C_x = A cos\vartheta \qquad C_x = 10 cos 230° \qquad C_x = -6.42m$$

Sumar las componentes $A_x + B_x + C_x$ de los vectores correspondientes a cada operación, y luego, calcular la magnitud del respectivo vector suma.

Solución:

Primero vamos a calcular el vector R = A + B. ¿Cómo lo hacemos?
Sumamos los componentes $A_x + B_x$ para obtener el componente R_x.
O sea que: $R_x = A_x + B_x$

En forma similar, sumamos los componentes $A_y + B_y$ para obtener el componente R_y . O sea que:

$R_y = A_y + B_y$

$A + B = R$ se llama R al vector resultante, este vector debe tener tanto componente en X como en Y se obtienen sumando $A_x + B_x$ para R_x y $A_y + B_y$ para R_y, así:

$R_x = A_x + B_x$ =18, 12 m (-25,9 m) = -7,78 m

$R_x = A_x + B_x$ =(8,45 m + 15 m) = 23,45 m

Entonces el vector suma tiene las componentes -7.78 m en el eje X y 23.45 m en el eje Y.

Y la magnitud es:

$$|R| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(-7.78)^2 + (23.45)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(60.5) + (549.9)}$$

$$|R| = \sqrt{(610.4m^2}$$

$$|R| = 24.7m$$

El sentido del vector resultante está dada por la siguiente ecuación:

$$\vartheta = tan^{-1} \frac{J_Y}{J_X}$$

Para este caso:

$$\vartheta = tan^{-1} \frac{B_Y}{B_X}$$

$$\vartheta = tan^{-1} \frac{23.45}{-7.78}$$

$$\vartheta = tan^{-1} \ -3.01$$

$$\vartheta = -71.64°$$

Pero este ángulo se mide desde el eje X negativo, en sentido de las manecillas del reloj.

Ahora vamos a calcular el vector R = A + B + C. ¿sCómo lo hacemos? Sumamos los componentes $A_x + B_x + C_x$ para obtener el componente Rx. O sea que:

$R_x = A_x + B_x + C_x$

En forma similar, sumamos los componentes $A_y + B_y + C_y$ para obtener el componente R_y. O sea que:

$R_y = A_y + B_y + C_y$

A + B + C = R se llama R el vector resultante el cual debe tener una componente en x R_x y otra componente R_y, luego:

$R_x = A_x + B_x + C_x = (18.12\,m + (-25.9m) + (-6.42)) = 14.2m$

$R_y = A_y + B_y + C_y = (8.45\,m + 15m + (-7.66)) = 15.79m$

El vector suma tiene las componentes -14.2 m en el eje X, y 15.79 m en el eje Y. Y su magnitud es:

$$|R| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(-14.2)^2 + (15.79)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(201.6) + (249.3)}$$

$$|R| = \sqrt{(450.9m^2}$$

$$|R| = 21.2m$$

El sentido del vector resultante está dado por:

$$\vartheta = \tan^{-1}\frac{R_Y}{R_X}$$

$$\vartheta = \tan^{-1}\frac{15.79}{-14.2}$$

$$\vartheta = \tan^{-1} 1.11$$

$$\vartheta = 48°$$

Veamos otro ejemplo:

Dados los vectores A igual a 10 m y forma un ángulo de 45° y el vector B igual a 24 m y forma un ángulo de 30°. Hallar la magnitud y dirección del vector suma resultante R = A+B.

Para el vector A:

$$A_x = 10\,m \cos 45° = 7.07m$$
$$A_y = 10m \ sen 45° = 7.07m$$

Para el vector B:

$$B_x = 24\,m \cos 30° = 20.7m$$
$$B_y = 24m \ sen 30° = 12m$$

Ahora, se suman las componentes en X y en Y:

$$A_x + B_x = 7.07 + 20.7m = 27.7$$

$$A_y + B_y = 7.07 + 12m = 19.07$$

Aplicando el teorema de Pitágoras con los datos anteriores, se halla la magnitud delvector.

$$|R| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(27.7)^2 + (19.07)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(767.3) + (363.6)}$$

$$|R| = \sqrt{(1,130.9m^2}$$

$$|R| = 33.6m$$

Y por último, se encuentra la dirección del vector, así:

$$\vartheta = tan^{-1} \frac{R_Y}{R_X}$$

$$\vartheta = tan^{-1} \frac{19.07}{27.7}$$

$$\vartheta = tan^{-1} \; 0.68$$

$$\vartheta = 34.5°$$

Para restar vectores, tal y como se hace en los métodos gráficos, simplemente se le cambia el sentido al vector que se quiere restar, sin variar la magnitud ni dirección. Es decir, si un vector M inicialmente se encuentra hacia el norte, el vector – M se encontrará hacia el sur.

El procedimiento para realizar la resta, es el mismo que se explicó anteriormente para la suma. Tienes que encontrar las componentes de los vectores, y luego se restan, es importante tener en cuenta cuál es el minuendo y cuál el sustraendo. En otras palabras, cuál es el vector que se está restando.

Ejemplo:

Dados los vectores A igual a 10 m y forma un ángulo de 45° este-norte y el vector B igual a 24 m y forma un ángulo de 30° este-norte.

Hallar la magnitud y dirección del vector resta resultante R = A - B. Primero calculemos las componentes de cada vector:

Para el vector A:

$$A_x = 10\,m \cos 45° = 7.07m$$

$$A_y = 10m \operatorname{sen} 45° = 7.07m$$

Para el vector B:

$$B_x = 24\,m \cos 30° = 20.7m$$

$$B_y = 24m \operatorname{sen} 30° = 12m$$

Ahora, restamos los componentes en x, y en y.

$A_x - B_x = A_x + (-B_x) = 7.07 - 20.7m = -13.63m$

$A_y - B_y = A_y + (-B_y) = 7.07 - 12m = -4.93$

La magnitud es:

$$|R| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(-13.63)^2 + (-4.93)^2}$$

$$|R| = \sqrt{(185.77) + (24.3)}$$

$$|R| = \sqrt{210.07m^2}$$

$$|R| = 14.5m$$

Y por último, se encuentra la dirección del vector resta, así:

$$\vartheta = tan^{-1} \frac{R_Y}{R_X}$$

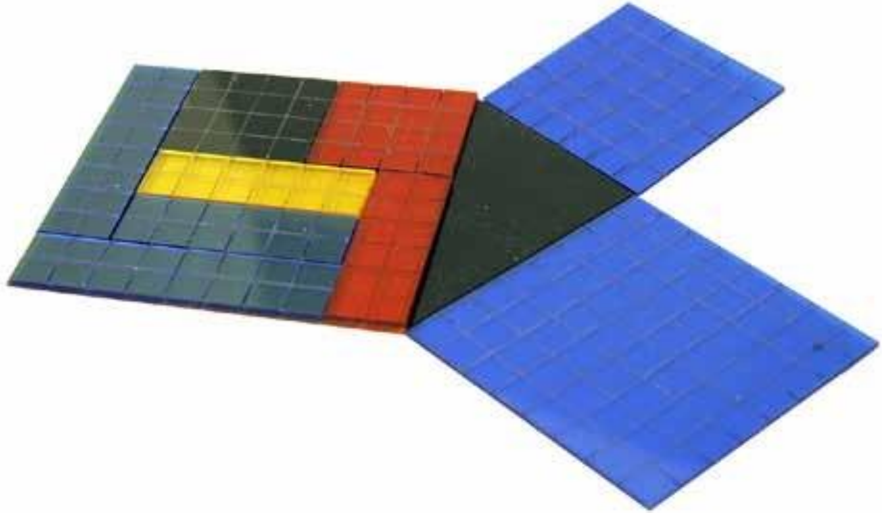
$$\vartheta = tan^{-1} \frac{-4.93}{-13.63}$$

$$\vartheta = tan^{-1}\ 0.36$$

$$\vartheta = 19.9°$$

Concluyamos

El método analítico se basa en el uso de componentes de los vectores. Para su resolución se utilizan el teorema de Pitágoras, ley de senos y ley de cosenos y debes tener en cuenta la palabra mágica **SOHCAHTOA**.



Glosario

Fuerza: es una magnitud física que mide la intensidad del intercambio de momento lineal entre dos partículas o sistemas.

Vector nulo: existe un vector que actúa como elemento nulo y cuando cualquier vector se sume con este vector el resultado es el mismo vector original. 0+a=a

Vector opuesto: para cualquier vector a, existe un vector -a tal que a + (-a) = 0. Este vector -a se denomina vector opuesto, y es único para cada a.

Vector: es un segmento orientado, un segmento que además de longitud, posee dirección y sentido. Los vectores se representan por flechas, y se nombran con una letra con una flecha en su parte superior, o con las letras de su punto inicio y origen, con una flecha en su parte superior.

Por: Juan Piloña

Palabras: 2,290

Imágenes: Depositphotos

Fuentes:

Bueche F. “Fundamentos de Física” .5ª edición, Mc Graw Hill. México, 1998.

Harry Lass. “Análisis Vectorial y Tensorial”. Compañía Editorial Continental, S.A México, 1969.

Hecht E. Física1. Álgebra y Trigonometría. International Thomson Editores. México, 2000.

Louis Brand. “Análisis Vectorial”. Compañía Editorial Continental, S.A. México 1965.

Murriay R. Spiegel. “Análisis Vectorial”. Mc Graw Hill. México, 1988

Portada: http://sigmudfreud.blogspot.es/cache/media/files/00/147/624/2014/03/1394476876_mc3a9todo.jpg