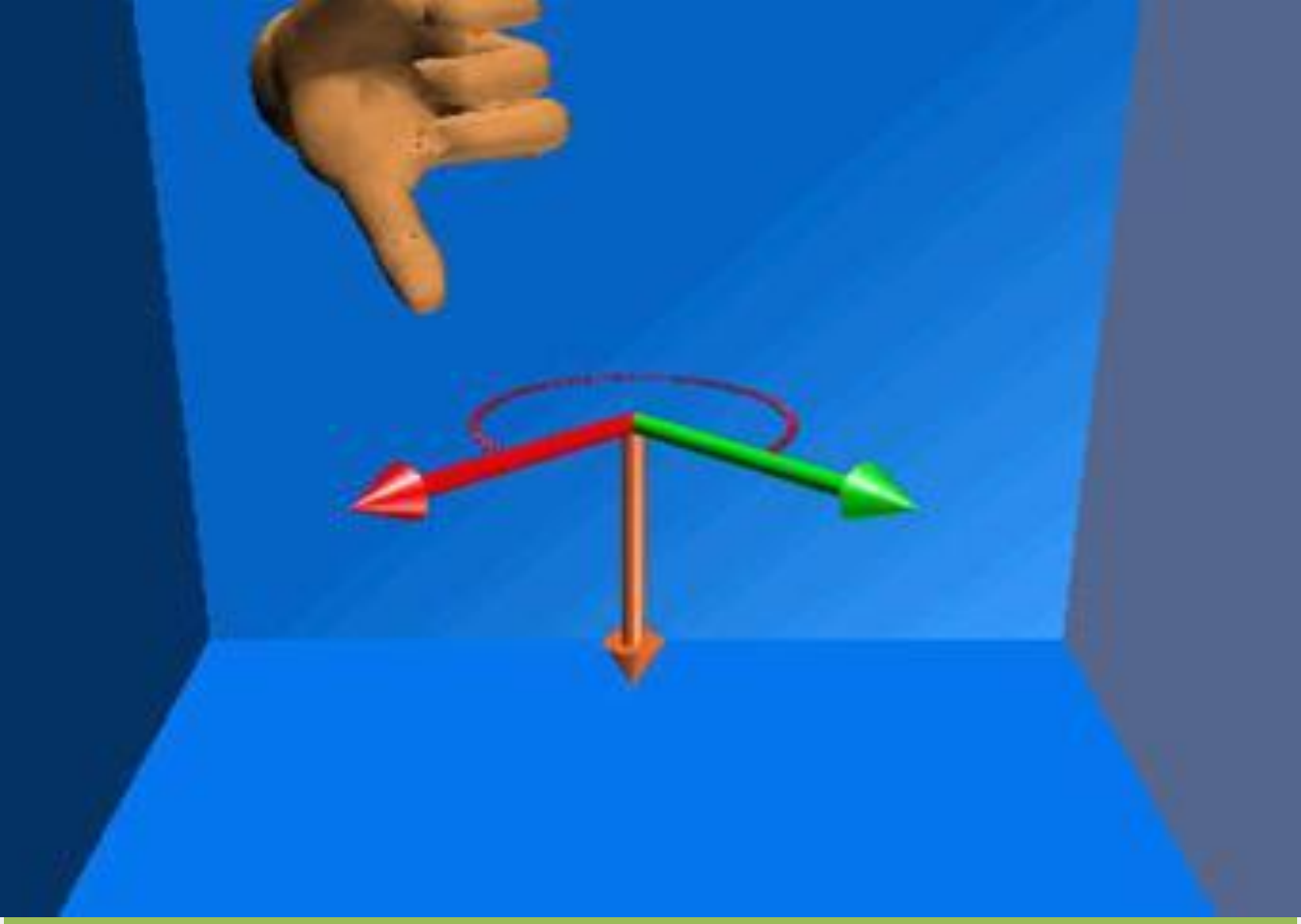


Producto escalar y vectorial

Por: Juan Piloña

ÍNDICE

Producto escalar
3
Expresión analítica del módulo de un vector
5
Expresión analítica del producto escalar
7
Propiedades del producto escalar
8
Producto vectorial
12
Glosario
16

Producto escalar

El producto **escalar** también es conocido como producto interno, producto interior o producto punto, siendo este último, uno de los más conocidos. Tal y como lo mencionamos anteriormente, el producto **escalar** es una operación entre vectores de un mismo espacio o plano.

Cuando hablamos de un plano es justo como la palabra lo indica....todo lo que puedas imaginar en forma plana, sin tomar en cuenta su profundidad o grosor. Por ejemplo la pared que está frente a tí, el tablero del escritorio, la páginade un cuaderno. Todo aquello que puedas dimensionar en **x** y en **y**. En este caso, se dice que estamos en R2, o sea en el espacio de dos dimensiones.

El resultado de esta operación es un número o **escalar**.
¿Cómo se obtiene?

Sencillo: calculas el módulo de cada **vector**. Multiplicas los dos módulos. Multiplicas el producto obtenido por el coseno del ángulo entre los dos **vectores**.

No te asustes, ahora vamos a ver un ejemplo.

Recuerda

Para obtener el módulo de un vector: se eleva al cuadrado el componente en **x**, se eleva al cuadrado el componente en **y**, se suman los dos cuadrados y a la suma se le saca la raíz cuadrada.

$$\textbf{Módulo de } \vec{U} = \sqrt{u_x{}^2 + u_y{}^2}$$

Expresión analítica del módulo de un vector

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Ejemplo de cálculo del módulo

$\vec{u} = (3, 0) \qquad \vec{v} = (5, 5)$

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{3 \cdot 3 + 0 \cdot 0} = 3$

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{5 \cdot 5 + 5 \cdot 5} = 5\sqrt{2}$

Se toma el vector.
Se eleva al cuadrado su componente en “x”.
Se eleva al cuadrado su componente en “y”.
El resultado de ambos cuadrados se suma.
Al resultado de la suma se le saca la raíz cuadrada.

Ahora sí, miremos el ejemplo: el producto **escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$ Se aplica cuando conoces el ángulo entre los **vectores**.

Ejemplo

$\vec{u} = (3, 0) \qquad \vec{v} = (5, 5) \qquad \widehat{uv} = 45°$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} \cdot \cos 45° = 11.3$

- En el caso anterior, se conoce el ángulo entre los dos vectores. Se calcula la magnitud de cada vector.
- Para calcular la magnitud, cada componente del vector se eleva al cuadrado.
- Los dos cuadrados se suman y se calcula la raíz cuadrada.
- Cuando ya tienes la magnitud de los **vectores**, se multiplican entre sí y después, por el coseno del ángulo.

Expresión analítica del producto escalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$ Se aplica cuando solo conoces sus componentes.

Ejemplo:

$\vec{u} = (3, 0)$ $\vec{v} = (5, 5)$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 15$

- Se multiplica el componente en “x” de u, por el componente en “x” de v.
- Se multiplica el componente en “y” de u, por el componente en “y” de v.
- El producto de ambas multiplicaciones se suma y ese es el resultado.

Propiedades del producto escalar

Conmutativa: el orden de los factores no altera el producto. No importa en qué orden los operes, vas a obtener el mismo resultado.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Asociativa: no importa en qué forma agrupes las multiplicaciones, de cualquier forma te va a dar el mismo resultado.

$$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (k \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

Distributiva: puedes operar de primero lo que está en el paréntesis y el resultado multiplicarlo por lo de afuera. O hacer la multiplicación por cada miembro y después sumarlos. De cualquier forma obtendrás el mismo resultado.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Positividad del producto escalar: si estás operando por un vector que no es cero, entonces el producto que vas a obtener es mayor que el **vector** original.

$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$

Ejercicios

Calcular el producto escalar de los siguientes vectores:

1. $\vec{U} = (3, 4)$ y $\vec{V} = (-8, 6)$
   $\vec{U} \cdot \vec{V} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$
2. $\vec{U} = (5, 6)$ y $\vec{V} = (-1, 4)$
   $\vec{U} \cdot \vec{V} = 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 = 19$
3. $\vec{U} = (3, 5)$ y $\vec{V} = (-1, 6)$
   $\vec{U} \cdot \vec{V} = 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 6 = 27$
4. $\vec{a}=(2,0)$ $\vec{b}=(-3, -1)$
   $\vec{a} \cdot \vec{b}=2 (-3)+ 0 (-1),= -6,-1)-6$
   $\vec{b} \cdot \vec{a}= -3(2)+ (-1)(0)= -6$

Propiedad conmutativa

5. $\vec{a}=(2,1)$ $\vec{b}=(3,-2)$ $k=2$

$$k\,.(\vec{a}.\vec{b})=2\,(2x3+1x-2)=2\,(4)=8$$

$$(k\,.\vec{a}).\vec{b}=(2\,.(2,1).(3,-2)$$

$$=(4,2).(3,-2)=4(3)+2(-2)$$

$$=12-4=8$$

Propiedad asociativa

$$\vec{u}(\vec{v}+w)=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,w$$

$$(1,2).(3-1,4-2)=(1x3+2x4)+\quad(1(-1)+2(-2))$$

$$(1,2)(2,2)=(11)+\ (-5)$$

$$1(2)+2(2)=6,$$

$$6=6$$

Cápsula informativa

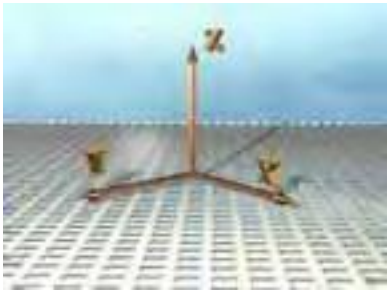
El producto cruz también se llama el producto vectorial o producto vectorial de Gibbs. El nombre de Gibbs es después **Josiah Willard Gibbs**, quien alrededor de 1881 introdujo tanto el producto escalar y el producto vectorial, utilizando un punto y unacruz para designarlos.

Para enfatizar el hecho de que el resultado de un producto de punto es un escalar, mientras que el resultado de un producto vectorial es un vector, Gibbs también introdujo el nombre alternativo producto escalar y producto vectorial de las dos operaciones. Estos nombres alternativos siguen siendo ampliamente utilizados en la literatura.

Producto vectorial

El producto cruz entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, denotado como $\vec{A} \times \vec{B}$, se lee A cruz B; da como resultado otro vector. Este **vector** tiene una magnitud definida como el productoentre las magnitudes A, B de los **vectores** y el seno del ángulo ~~O~~ que forman entre sí.

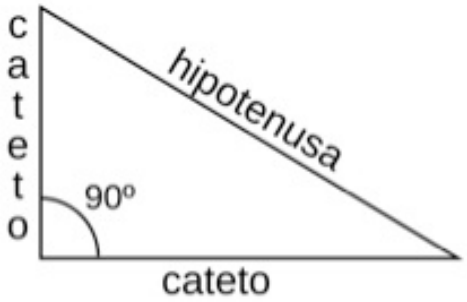
El producto vectorial o producto cruz ocurre en el espacio trimensional, o sea cuando consideramos tres dimensiones. Las dimensiones a considerar son alto, ancho y profundidad. Observa que ahora vamos a trabajar en R3, en donde tendremos x, y, z



$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\ Sen\ O$

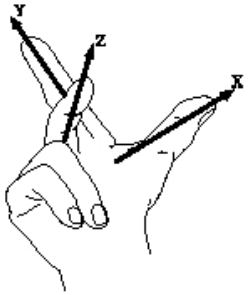
Se aplica cuando conoces el ángulo entre los vectores.

El producto cruz relaciona los catetos opuestos de los triángulos rectángulos con las hipotenusas de dichos triángulos.



La dirección de A x B, o sea el nuevo vector, esperpendicular al plano formado por A y B. Es por eso que se trabaja en R3, tres dimensiones. El sentido del nuevo vector está determinado por el avance de un tornillo de rosca derecha cuando se gira un ángulo θ desde A hasta B. Imagina que estás enroscando un tornillo.

Una regla más conveniente que puede usarse para determinar la dirección de A x B es la regla de la mano derecha.



Los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de A y luego “se enrollan” hacia B un ángulo ϴ. La dirección del pulgar derecho levantado representa la dirección de A x B.

Debido a la notación, A x B a menudo se lee “A cruz B”. De ahí el término producto cruz.

Propiedades del producto vectorial

1. A diferencia del producto **escalar**, el orden en el cual se multiplican los dos vectores en un producto cruz es importante, esto es, A x B = -(B x A)

En consecuencia, si se cambia el orden del producto cruz, debe cambiar el signo.

Esta relación se puede verificar fácilmente con la regla de la mano derecha. Es decir el producto cruz no es conmutativo.

2. Si el vector A es paralelo al vector B (θ = 0° ó 180°); entonces A x B = 0; por lo que A x A = 0.

3. Si A es perpendicular a B, entonces |A x B| = AB.

4. El producto vectorial obedece a la ley distributiva, es decir,

A x (B + C) = A x B + A x C.

Cuando no se conoce el ángulo entre los vectores, el producto vectorial o producto cruz se opera usando determinantes. Por el momento no vamos a trabajar aplicaciones de este tema, por lo que cuando lo hagamos, explicaremos la forma de hacerlo.

Glosario

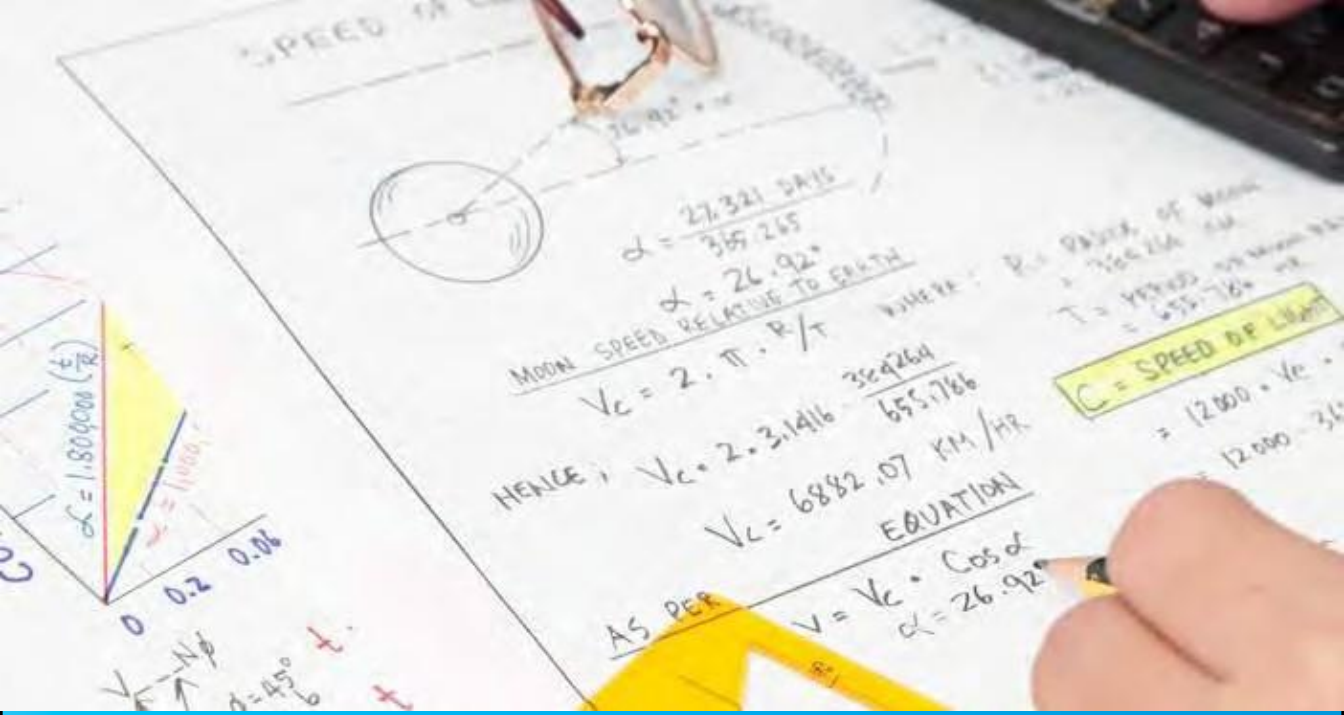
Escalar: tipo de magnitud física que se expresa por un solo número y tiene el mismo valor para todos.

Euclidiano: relativo al método de este matemático griego del siglo III a. C.

Josiah Willard Gibbs: nacido el 11 de febrero de 1839 en New Haven: Connecticut, Estados Unidos, fue un físico estadounidense que contribuyó de forma destacada a la fundación teórica de la termodinámica.

Nulo: refiere a algo falto de fuerza o valor para tener efecto.

Vector: segmento que además de longitud, posee dirección y sentido. Los vectores se representan por flechas, y se nombran con una letra con una flecha en su parte superior, o con las letras de su punto inicio y origen, con una flecha en su parte superior.



Por: Juan Piloña

Palabras: 1,537

Imágenes: Depositphotos

Portada:

http://www.joaquinmur.com/practica3/gsimumag/img031.jpg

Fuentes:

Domínguez Muro, Mariano. Universidad de Salamanca. Ediciones Universidad Salamanca. ed. Trigonom etría activa: 2 BUP (1985). ISBN 978-84-7800-056-2.

http://www.history.mcs.standrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functions.html

Libro Boyer, Carl Benjamin (1991). A "History of Mathematics" (2da. edición). John Wiley & Sons, Inc.. ISBN 0471543977.

O´Connor, John J.; Robertson, Edmund F. (1996), «Trigonometric functions» (en inglés), MacTutor History of Mathematics archive, Universidad de Saint Andrews,