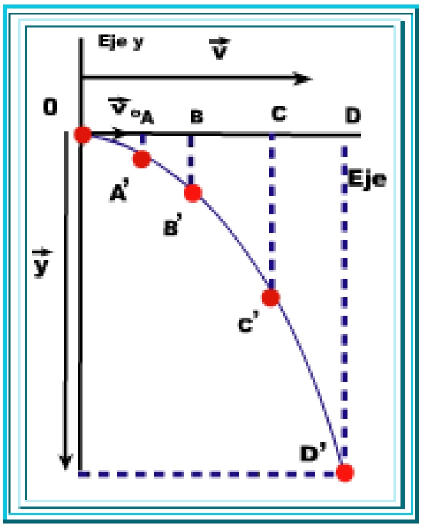
Lanzamiento horizontal

Una pelota de béisbol se proyecta horizontalmente en el vacío desde un punto O con velocidad $\vec{Vo}$. Si la tierra no ejerciera ninguna atracción sobre la pelota, y se supone nula la resistencia del aire, la pelota se movería en el vacío y en tiempos t_1, t_2, t_3... ocuparía posiciones tales como A, B, C, D ,... y el movimiento sería rectilíneo uniforme de velocidad constante $\vec{Vo}$. Sin embargo como la pelota está sometida a la atracción gravitatoria, a la vez que se mueve horizontalmente, cae verticalmente con aceleración constante - $\vec{g}$ y al final de los tiempos indicados, las posiciones de la pelota son, respectivamente, A', B',C',D' ,... La curva que une a estos puntos corresponde a una parábola .



La trayectoria seguida por la pelota puede considerarse como el resultado de dos movimientos: Uno horizontal uniforme a lo largo del eje x y de velocidad constante $\vec{Vo}$ $(\vec{a} = 0)$, y otro vertical de caída, uniformemente variado a lo largo del eje y de aceleración constante $(\vec{a} = -\vec{g})$.

Ecuaciones de la velocidad

La componente horizontal de la velocidad V_x será de magnitud constante a través de todo el recorrido e igual a V_o. Esto se debe a que el movimiento en esta dirección es con velocidad constante. En toda la trayectoria la componente horizontal (V_x) será la misma velocidad inicial; esto es $\vec{V}_x = \vec{V}_o$. En módulo:

$$Vo = Vx$$

La componente vertical V_y en un instante de tiempo cualquiera, viene dada por:

$$V_y = g \cdot t$$

La magnitud de la velocidad resultante V, viene dada en módulo por la expresión:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

Para determinar la dirección del vector $\vec{V}$, es decir el ángulo a que forma $\vec{V}$ con el eje x , basta con aplicar la relación trigonométrica

$\text{Tan}\ \theta = \frac{V_y}{V_x}$	Luego:
$\theta = \tan^{-1} \frac{V_y}{V_x}$	Recordar que el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria descrita por la partícula

Ecuaciones del desplazamiento

Como se puede notar el movimiento tiene simultáneamente un desplazamiento horizontal ($\vec{X}$) y un desplazamiento vertical ($\vec{Y}$) en un instante de tiempo cualesquiera.

$$x = V_0 \cdot t$$

La ecuación de desplazamiento horizontal (X) en módulo, es la misma del movimiento rectilíneo uniforme puesto que la rapidez en ese sentido es constante

El desplazamiento vertical (y) en módulo se calcula como si el cuerpo se moviese en caída libre

$$y = -\tfrac{1}{2}\, g \cdot t^2$$

$$y = h - \tfrac{1}{2}\, g \cdot t^2$$

La posición a lo largo del eje y, en el tiempo t.

El desplazamiento total (d) en módulo viene dado por:

$$d^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

La dirección del desplazamiento se obtiene aplicando la definición de tangente

El tiempo de vuelo (t_v)
Es el tiempo transcurrido desde el momento del lanzamiento hasta tocar el suelo.

$t_v = \sqrt{\frac{2y}{g}}$	Recuerde que la cantidad subradical será siempre positiva

El alcance horizontal (R) es el desplazamiento horizontal en el tiempo de vuelo. La ecuación para calcular el alcance horizontal, pero con $t = t_v$

$$R = V_x \cdot t_v$$

Ecuación de la Trayectoria
La idea consiste en demostrar que la trayectoria del proyectil es parabólica. En efecto, el desplazamiento horizontal para un cierto tiempo t viene dado por:

$x = V_0 \cdot t$	de donde :	$t = \frac{x}{V_0}$ (a)

Por otra parte, el desplazamiento vertical al mismo tiempo t es:

$$y = h - \tfrac{1}{2}\, g \cdot t^2 \text{(b)}$$

Como el tiempo para ambos desplazamientos es el mismo, podemos sustituir t de la ecuación (a) en tde la ecuación (b) quedando:

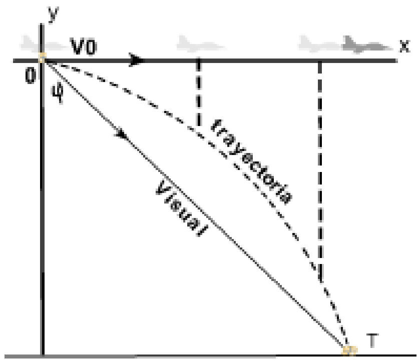
$$y = h - \tfrac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{V_0}\right)^2$$

Como $\frac{1}{2}$, V_o y g son constantes se pueden sustituir lo que está dentro del paréntesis por k, adoptando la expresión la forma siguiente:

$y = h - k \, . \, x^2$	que corresponde a la ecuación de una parábola.

Por lo tanto las coordenadas (x ,y) que determinan la posición de la partícula en el plano serán:

$$(x, y) = (V_0 \, . \, t, \; h - \frac{1}{2} g \, . t)$$



Ejemplo
Un avión vuela con una velocidad horizontal constante de 600km/h a una altura de 6 km y se dirige hacia un punto que se encuentra directamente arriba de su objetivo ¿ Cuál es el ángulo de mira al que debe arrojarse un paquete de supervivencia para que llegue a su objetivo?

Solución
Se escoge un referencial fijo respecto de la Tierra con su origen 0 en el punto que se suelta el paquete, cuya velocidad en el momento de ser soltado, es igual a la del avión.
V_x= 600 Km/h = 166,66 m/seg

De aquí que la velocidad inicial del paquete Vo sea horizontal y su magnitud sea de 600 Km/h. El ángulo de tiro es cero.

El tiempo de vuelo se calcula con la expresión $t_v = \sqrt{\frac{2y}{g}}$

t_v= 34,99 seg (No depende de la rapidez del avión cuando el tiro es horizontal)
El alcance horizontal es

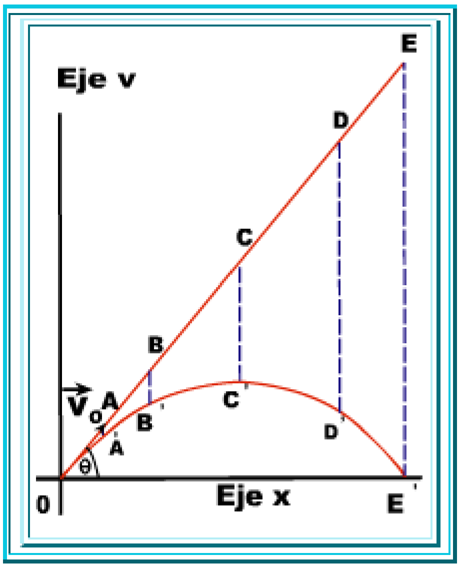
R = V_x. t_v= 166,66 m/seg X 34,99 seg	R = 5831,43 m = 5831,4 m = x

De modo que el ángulo de mira f se define como

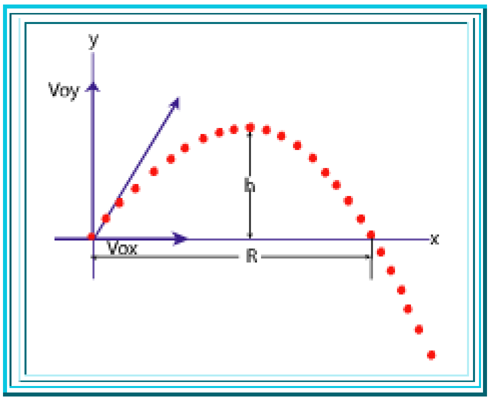
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{x}{y} = \tan^{-1} \frac{5831{,}43m}{6000m} = 44^\circ \, 11'$$

Lanzamiento inclinado

Consiste en estudiar el caso de una partícula o proyectil que se lanza con una velocidad inicial $\vec{V_o}$, formando un ángulo q_0 con la dirección horizontal. Su velocidad cambia constantemente debido a la acción del campo gravitatorio.

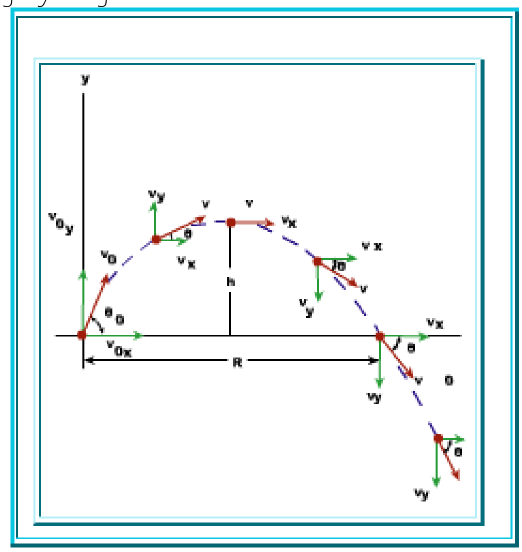


Los componentes rectangulares de la velocidad inicial $\vec{V}_{ox}$y $\vec{V}_{oy}$. (Los subíndices se utilizan para indicar los valores iniciales de $\vec{V_o}$ en cada uno de los ejes). Si no existiera la atracción gravitatoria, en tiempos t_1, t_2, t_3, ... ocuparía respectivamente posiciones tales como A, B, C, D, y el movimiento sería rectilíneo uniforme de velocidad constante $\vec{V_o}$, Sin embargo como el proyectil está sometido a la fuerza de atracción gravitatoria, a la vez que se mueve según la recta AE, cae verticalmente, y al final de los tiempos indicados las posiciones del proyectil son respectivamente A', B',C,'D' ... La curva que une estos puntos determina la trayectoria del proyectil, que corresponde a una parábola .



Cuando el cuerpo es lanzado forma un ángulo q_0 con la horizontal y la única fuerza que actúa es la atracción gravitatoria. Luego en la dirección horizontal no existe aceleración, en tanto que en la dirección vertical el cuerpo está sometido a la acción de la fuerza de la gravedad y por ello, en dicha dirección se manifiesta un movimiento con aceleración constante. Por lo tanto, el movimiento del proyectil será el resultado de la composición de dos movimientos, uno con velocidad constante en el eje x o eje de las abscisas y otro con aceleración constante en el eje y o eje de las ordenadas.

El proyectil en su movimiento ascendente está dotado de un movimiento uniformemente retardado con aceleración $\vec{a}$ = - g. Se observa que la componente de la velocidad a lo largo del eje y (V_y), cuando el proyectil sube, va disminuyendo hasta hacerse igual a cero en el punto de máxima altura ($h_{máx}$)de la curva. A partir de este punto, cuando el proyectil empieza a bajar comienza un movimiento uniformemente acelerado $\vec{a}$ = g , luego la componente de la velocidad $V_y$cambia de sentido y aumenta en magnitud a medida que el cuerpo continúa su caída libre. Se nota que durante todo el movimiento, la componente horizontal de la velocidad a lo largo del eje horizontal (eje x) se mantiene constante y por consiguiente el movimiento a lo largo de este eje es rectilíneo uniforme.



De acuerdo con lo anterior, como la partícula describe un movimiento que resulta de la superposición de un movimiento rectilíneo uniforme ($\vec{V}$ = constante) y un movimiento uniformemente variado ($\vec{a}$ = constante) a lo largo de los ejes x y y, respectivamente, podemos encontrar las coordenadas de posición (x,y) del proyectil en cualquier instante t a partir de las siguientes ecuaciones.

Ecuaciones de la velocidad en el momento del lanzamiento (t = 0)

Se supone que se dispara un proyectil, con una velocidad inicial $\vec{Vo}$, formando con la horizontal un ángulo q_0.

Las componentes del vector $\vec{Vo}$ en las direcciones de los ejes vienen dadas en módulo por:

$V_{OX} = V_O \,.\cos\,\theta_O$	(Componente Horizontal)
$V_{OY} = V_O \,.\cos\,\theta_O$	(Componente Vertical)

Ecuaciones de la velocidad para un instante después del lanzamiento

Cuando el proyectil ocupa una determinada posición en un instante t después de haber sido lanzado la velocidad $\vec{V}$, tendrá una componente horizontal que se llama $\vec{V}_x$ y una componente vertical que se llama V_y.

Ecuaciones del desplazamiento

El movimiento horizontal lo realiza el proyectil con velocidad constante, por lo que el desplazamiento horizontal x viene dado por la ecuación:

$$\mathbf{x} = V_X \,.\, t \;=\; V_o.\cos\,\theta_o\,.t$$

La magnitud de la componente horizontal de la velocidad se mantiene constante a través de todo el recorrido y vendrá dada por:

$$V_X = V_{OX} = V_O \;.\cos\,\theta_O$$

La magnitud de la componente vertical en cualquier instante viene dada por:

$$V_y \;=\; V_{oy} \;- g.\,t$$

La magnitud de la velocidad en cualquier instante viene dada como:

$$\mathbf{V}^2 = V_X^{\;2} + V_y^2$$

El ángulo que dicho vector forma con el eje horizontal representa la dirección de la velocidad y viene dado por:

$$\mathrm{Tan}\;\theta = \frac{V_y}{V_X}$$

El movimiento vertical lo realiza con aceleración constante $\vec{g}$, dirigida hacia abajo, por lo que la ecuación del desplazamiento vertical y vendrá dada por:

$$y = V_{oy}\;.t - \tfrac{1}{2}\;g\,.t^2 = (\,V_0\;.\mathrm{Sen}\;\theta_0\,).t - \tfrac{1}{2}\;g\,.t^2$$

Si la anterior ecuación se resuelve para $t \;=\; \dfrac{x}{V_o.Cos\;\theta_o}$ se obtiene:

$$\mathbf{y = (\tan\;\;\theta_0)x - \frac{g}{2\,(v_0\cos\,\theta_0)}x^2}$$

Esta ecuación es válida para ángulos de lanzamientos ubicados dentro del rango 0 < q_0 < p / 2. La ecuación es válida para cualquier punto (x,y) a lo largo de la trayectoria del proyectil. Esta expresión es de la forma $y = ax-bx^2$, que es la ecuación de una parábola que pasa por el origen. Se advierte que la trayectoria está completamente especificada si se conoce tanto la rapidez inicial V_o como el ángulo de lanzamiento q_0.

Ecuación del tiempo máximo

Se llama tiempo máximo, al tiempo empleado por el proyectil en alcanzar la altura máxima ($y_{máx}$).
A medida que el proyectil asciende va disminuyendo su velocidad hasta llegar un momento en que la misma se hace cero. Para ello hacemos V_y= 0 en la ecuación:

$$V_y = V_{0y} - g\,.t$$
$$t_{máx} = \frac{V_{oy}}{g} = \frac{V_o\,.Sen\,\theta_o}{g}$$

Ecuación de la altura máxima ($y_{máx}$)

La altura máxima se obtiene haciendo $t = t_{máx}$ en la ecuación $y = V_{oy}\,.t - \frac{1}{2}\,g\,.t$

$$Y_{máx} = \frac{V_{oy}^{\,2}}{2g} = \frac{V_o^{\,2}.Sen^2\theta_o}{2g}$$

Ecuación del tiempo de vuelo (t_v)

El tiempo de vuelo es el tiempo transcurrido por el proyectil desde su punto partida.

$$t_v = 2.\,t_{máx}$$

Alcance horizontal (R)
Es el desplazamiento horizontal en el tiempo de vuelo.

$$V = \omega.R = 1{,}66X10^3\,Km/h = 463\text{ m/seg}$$

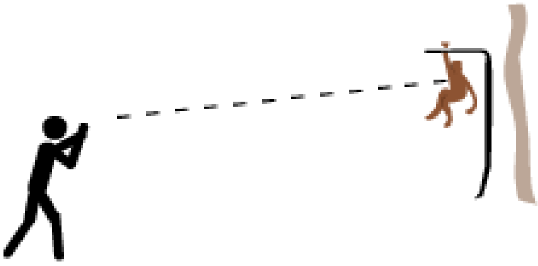
Ejemplo 2
José Manuel Rey, un notable futbolista de la Vinotinto patea el balón con un ángulo de inclinación sobre la horizontal de 37° y con una velocidad inicial de 20 m/seg. A 36 m del punto de partida se encuentra un vertical de la Portería con el cual choca la esférica. ¿A que altura del poste respecto a la horizontal pega el balón?

Solución

V_o= 20 m/seg	q_0= 37°	X = 36 m
$V_{ox} = V_o\,.cos\,\theta_o = 16$ m/seg	$V_{oy} = V_o\,.Sen\,\theta_o = 12$ m/seg	$X = V_{ox}\,.t \Rightarrow t = \frac{x}{V_{ox}} = 2.25$ seg

La posición se denota por la ecuación:

$Y = Voy\,.\,t - \frac{1}{2}\,g\,.t^2$	Y = 2,19 = 2,2 m



Ejemplo 3
Un día un Cazador salió a capturar monos. Pronto encontró uno colgado tranquilamente en la rama de un árbol. El cazador no era muy buen físico y pensó que si apuntaba directamente al mono, seguramente le daría. El cazador apunta directamente al mono sin tener en cuenta que el dardo seguirá una trayectoria parabólica y por lo tanto pasará debajo del mono. Pero el mono había visto el cazador y mientras éste apuntaba hacia él, el mono pensaba cuidadosamente que hacer.

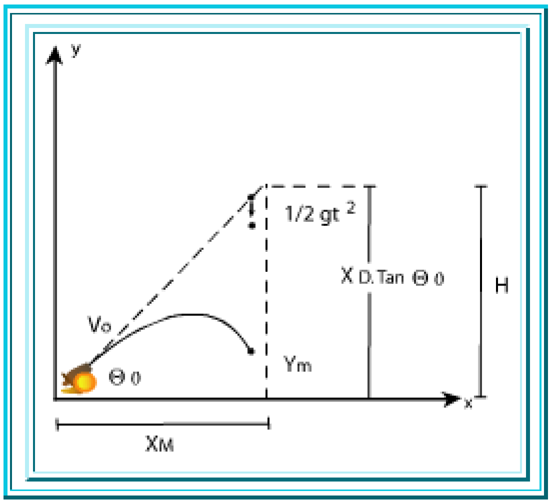
Decidió que abandonaría la rama justo cuando viera salir el dardo de la cerbatana, se suelta de la rama y cae del árbol esperando evitar el dardo. Demostrar que el mono será alcanzado por el dardo independiente de cual sea la velocidad inicial del dardo, con tal que sea suficientemente grande para recorrer la distancia horizontal que hay hasta el árbol.

Solución
El mono y el dardo se aceleran hacia abajo en la misma cantidad.
La altura del dardo en cualquier instante es:

$$Y_D = Voy\,.\,t - \frac{1}{2}\,g\,.t^2$$

La altura del mono en cualquier instante es:

$$Y_M = H - \frac{1}{2}\,g\,.t^2$$



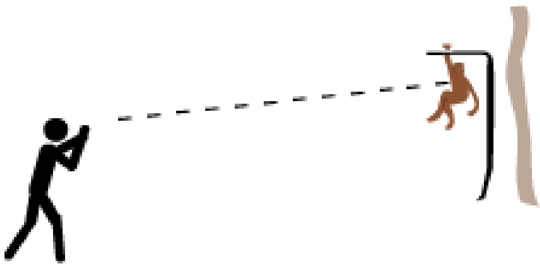
Demostrar que H = Voy. t;

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{H}{X} \Rightarrow H = X.\ \text{Tan}\,\theta$$

$$H = (\text{Vo.Cos}\theta).\ t.\ \frac{Sen\theta}{Cos\theta} =$$

$$H = \text{Vo.Sen}\theta.\ t.$$

$$H = Voy.t$$



Efectivamente el mono es alcanzado por el dardo.
Nota:
Una colisión puede ocurrir cuando $\text{Vo.Sen}\theta \geq \sqrt{\frac{g.d}{2}}$ d es la elevación inicial del blanco sobre el suelo.