Representación de Escalares y vectores

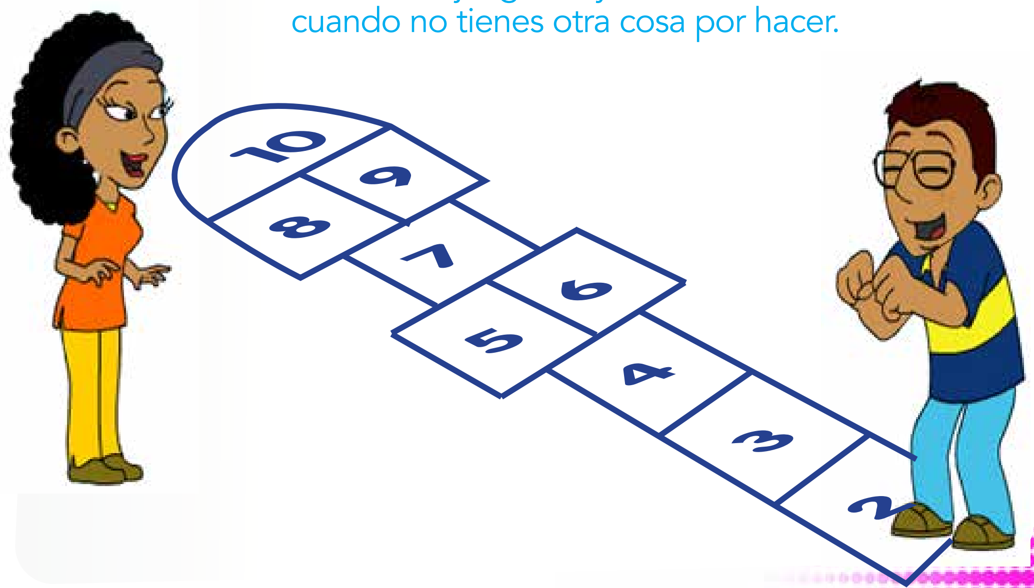
Por: Juan Piloña

Índice

Representación de Escalares y vectores

Hoy estábamos aburridos. No teníamos muchas cosas por hacer. Teníamos toooodo el tiempo del mundo, un yeso......
sí un yeso o tiza como los que se usan para escribir en los pizarrones de antes y una enorme banqueta de cemento en donde estábamos sentados.

Alguien se puso a dibujar en el piso y ¿Ni sabes qué?..... terminamos jugando avioncito. ¿Alguna vez has jugado avioncito? Es un juego muy divertido, sobre todo cuando no tienes otra cosa por hacer.



Todo iba muy bien, hasta que Lunático empezó a hacer de las suyas.

Empezó a dibujar unas letras raras en el piso, letras con una flecha encima y a murmurar entre dientes: que la longitud del salto de Mariana. Perdón...olvidé presentarme, Mariana soy yo. Que la posición de Kimberly y la velocidad de Bryan en el avión.

$$\vec{A}, \vec{a}, \vec{w}$$

Me acerqué despacio, muy despacio y observé. Aaaaah estaba hablando de escalares y vectores. Ya aprendí que la longitud es una magnitud escalar y la posición y la velocidad son magnitudes vectoriales. Hasta allí todo bien....esa parte
ya la controlo, pero ¿Y todos esos signos?

Lunático prometió explicarme lo que estaba haciendo y ayudarme a descifrar esos signos taaaaan extraños.

¿Me acompañas? No me gusta andar sola.

Recuerda

TOMA NOTA

Las magnitudes escalares son aquellas que quedan completamente definidas por un número y las unidades utilizadas para su medida. Esto es, las magnitudes escalares están representadas por un número. Podemos decir que poseen un módulo, pero que carecen de dirección y sentido. Ejemplos: longitud, tiempo, masa, temperatura, cantidad de sustancia, intensidad luminosa, intensidad de corriente eléctrica.

TOMA NOTA

Las magnitudes vectoriales son aquellas que quedan caracterizadas por una cantidad o módulo, una unidad de medida, una dirección y un sentido. Ejemplos: desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento.

¿Cómo puedo representar las magnitudes escalares y vectoriales?

Hay dos maneras de representar las cantidades escalares y vectoriales con sencillez, que permiten distinguir entre las dos: la representación escrita y la representación gráfica.

Estas dos formas de representación se complementan entre sí, es decir, se completan o se mejoran.

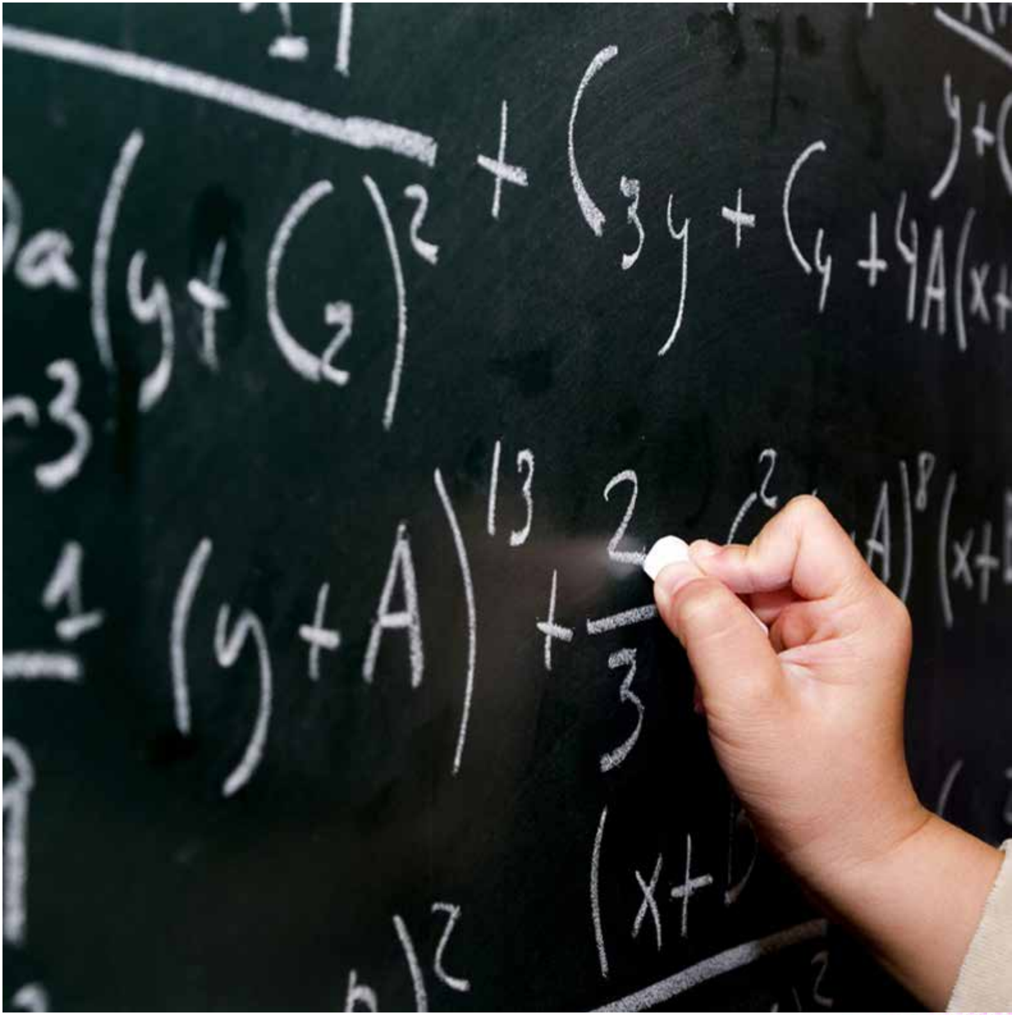
Representación escrita

Cuando estás trabajando en matemática, específicamente con el álgebra, debes identificar a las diferentes variables. Para hacerlo les pones un nombre y para no estar escribiendo tanto, relacionas ese nombre con alguna letra.

Por ejemplo, a la longitud de una pared le pones "x" y a las horas trabajadas les pones "y". Vamos a hacer lo mismo con los escalares y los vectores.

A los escalares los vamos a identificar con una letra del alfabeto, cualquier letra, lo importante es que sea minúscula.

Para los vectores hay dos formas y puedes usar la que más te guste: escribir una letra mayúscula en negrita o una letra mayúscula con una raya o flecha encima.



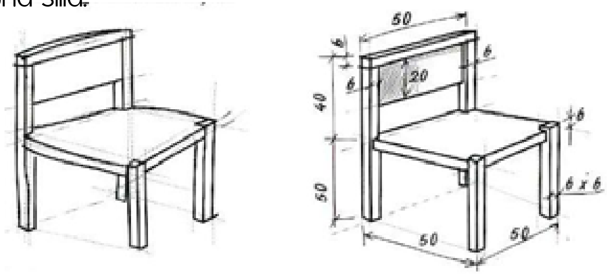
Cantidad	Símbolo/nomenclatura	Descripción
Escalar	**r, d, b, c,**	Una letra cursiva (usualmente minúscula)
Vectorial	**F** ó $\vec{F}$	Una letra negrita o con una pequeña flecha por encima

Ya hemos llegado a un acuerdo, de ahora en adelante, cuando mires una letra minúscula sabrás que se refiere a un escalar y cuando mires una letra mayúscula en negrita o con una flecha encima, vas a saber que se trata de un vector. Observa la información en la tabla siguiente:

Escalares			**Vectores**		
Peso	p	p = 100 libras	velocidad	$\vec{V}$	V = 80 km/hr
Volumen	v	v = 125 cm^3	velocidad	V	V = 80 km/hr
Temperatura	t	t = 25°C	aceleración	$\vec{A}$	A = 90 m/seg^2

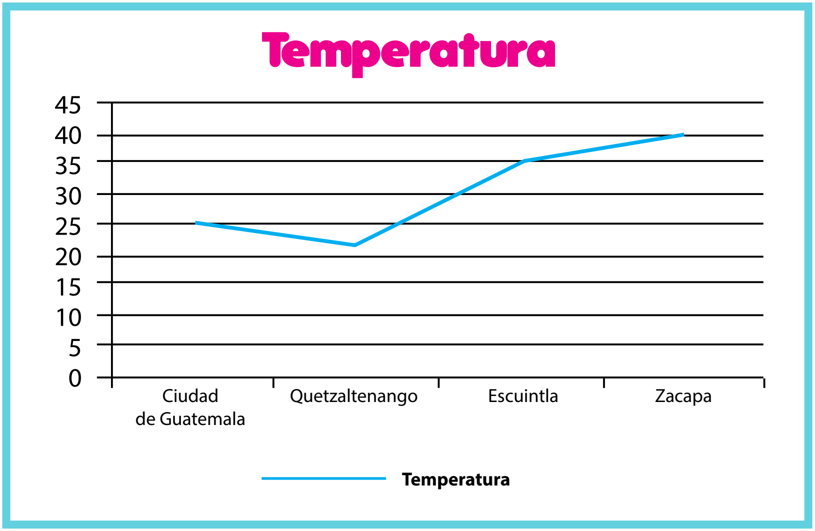
Representación gráfica

Las cantidades escalares se acostumbra representarlas gráficamente cuando se trata de alguna longitud o dimensión en general. Por ejemplo las medidas de la longitud de una silla.



Pero es más frecuente graficar su comportamiento en función de alguna variable. Por ejemplo los rangos o registros de temperaturas en diferentes regiones del país (temperatura en función de la región).

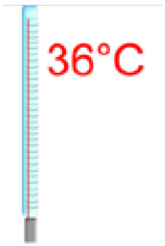
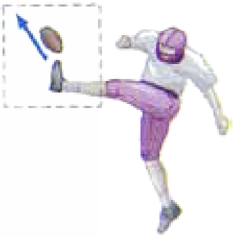
Región	Temperatura
Ciudad de Guatemala	25
Quetzaltenango	22
Escuintla	35
Zacapa	40



Los vectores se representan por medio de flechas cuya longitud corresponde a su magnitud y su dirección se especifica.


°C
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
°F
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40

Resumiendo

Cantidad	Representación Gráfica	Descripción
Escalar		Solamente indica magnitud
Vectorial		Indica tanto magnitud como sentido

Componentes de los vectores

Hablemos ahora de las diferentes partes que componen un vector, de sus componentes. Es importante que recuerdes que los vectores están completamente determinados por su cantidad o módulo, unidad de medida, dirección y sentido.

Cuando dibujas un vector, lo representas gráficamente, puedes distinguir los siguientes componentes:

- **Origen o Punto de Aplicación**
  - También llamado Punto de aplicación, es el punto exacto sobre el cual actúa el vector.

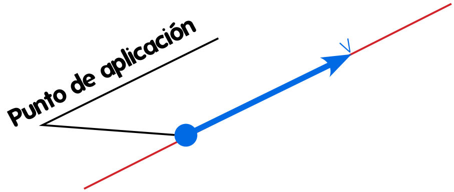
- **Sentido**
  - Se indica mediante una flecha situada en el extremo del vector, indicando hacia qué lado de la línea se dirige el vector.

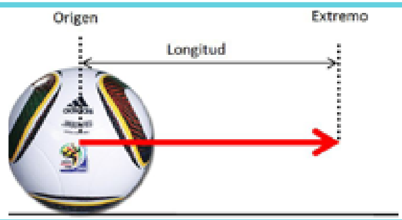
- **Dirección**
  - Orientación de la recta.

- **Módulo**
  - Es la longitud o tamaño del vector. Para hallarla es preciso conocer el origen y el extremo del vector.

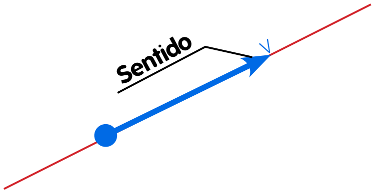
Toma Nota

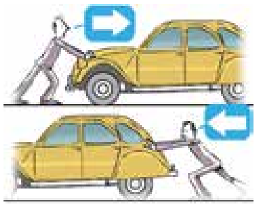
Origen o punto de aplicación



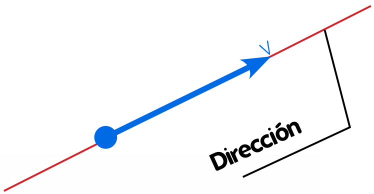


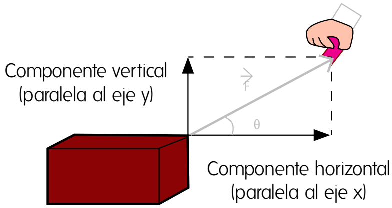
Sentido



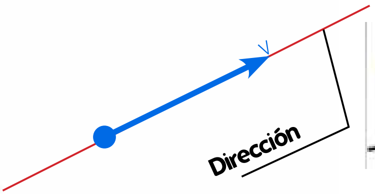


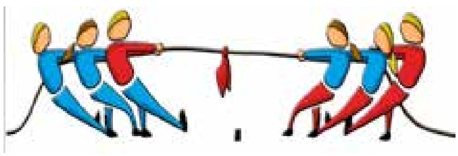
Dirección



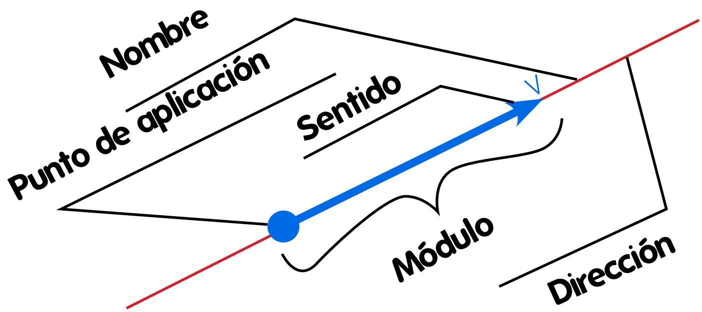


Módulo





TU RESUMEN



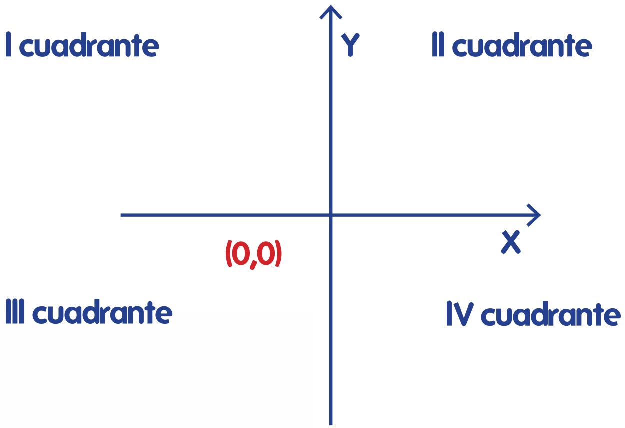
El sistema de referencia que usaremos para dibujar los vectores, del cual ya hicimos un breve recordatorio en la lección anterior, es el Sistema de Coordenadas Cartesiano.

No te desesperes, esto es como participar en una maratón: primero debes hacer ejercicios de calentamiento, luego entrenar y cuando estás preparado.... competir!. Vamos a aprender cómo dibujar los vectores en el plano (cartesiano) y en la siguiente lección, irás aprendiendo cómo usarlos..... Cómo hacer un análisis de cómo se mueven las cosas y lo que va a pasar.

Localización de puntos en el sistema de coordenadas cartesianas

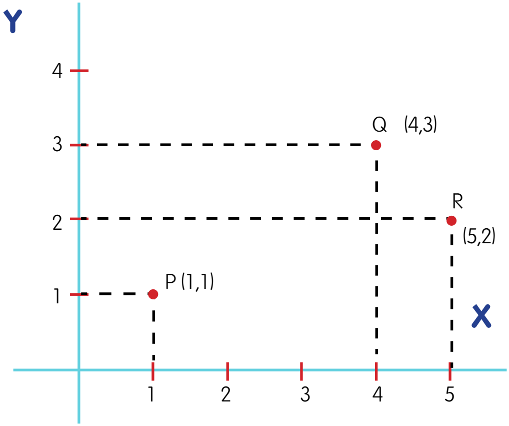
El sistema de coordenadas cartesianas en el plano está constituido por dos rectas perpendiculares que se intersecan en un punto "O" al que se le llama "el origen".

Una de las rectas se acostumbra representarla en posición horizontal y se le da el nombre de eje X o eje de las abscisas; a la otra recta, vertical, se le denomina eje Y o eje de las ordenadas, y ambas constituyen los dos ejes de coordenadas rectangulares, los cuales dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.



El nombre de "cartesiano" es en honor del filósofo francés René Descartes (1596-1650) ya que fue él, quien planteó de manera formal la idea de resolver problemas geométricos por medio del álgebra, a partir de un sistema de coordenadas rectangulares.

En este sistema de coordenadas, la posición de un punto P en el plano queda determinada mediante una pareja de números reales (x, y) de los cuales el primero, x, representa la distancia del punto P al eje coordenado Y, en tanto que el segundo, y, representa la distancia del punto P al eje X. Esto se representa en la forma:



Para llegar al punto (1,1) debes "caminar" una unidad hacia la derecha, sobre el eje "x" y marcar un punto, después, desde ese punto, "caminar" una unidad hacia arriba, en forma paralela al eje "y". En ese lugar dibujas un punto rojo, estás en el punto (1,1)

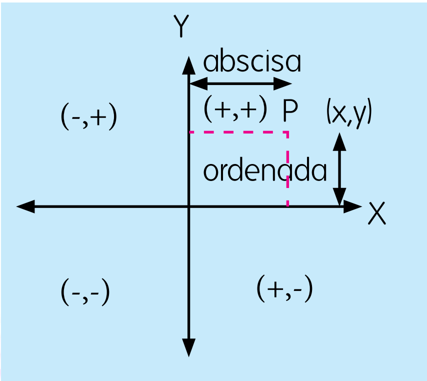
En forma similar, para ubicar el punto (5,2), te mueves 5 unidades sobre el eje "x", marcas un punto y desde allí subes 2 unidades sobre el eje "y" y al llegar, dibujas un punto rojo, el punto (5,2).

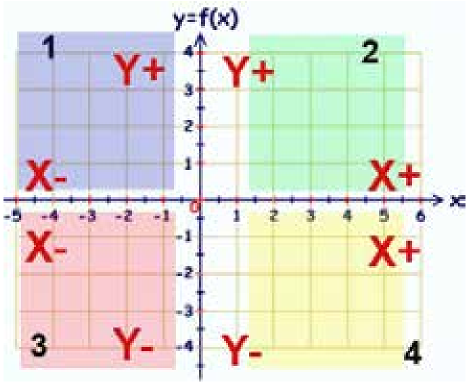
Ahora, tú solo. Sigue la ruta para ubicar el punto (4,3).

La distancia de un punto al eje Y se le llama abscisa del punto, la distancia de un punto al eje X se le llama ordenada del punto.

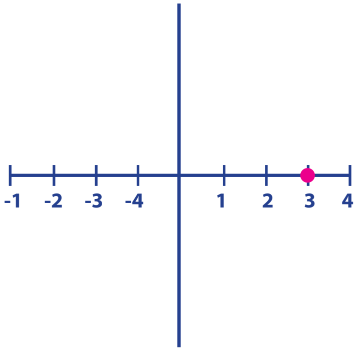
Las abscisas (valores de x) son positivas en el primero y en el cuarto cuadrante, en tanto que son negativas en el segundo y en el tercer cuadrante. Esto es fácil, simplemente imagina una recta numérica (en realidad eso es) en donde, a la derecha del cero, todos los valores son positivos y a la izquierda del cero, son negativos.

Las ordenadas (valores de y) son positivas en el primero y en el segundo cuadrante, en tanto que son negativas en el tercero y en el cuarto cuadrante. En igual forma, imagina el eje "y" como una recta numérica, en donde del cero para arriba, todos los números son positivos y del cero para abajo, son negativos.

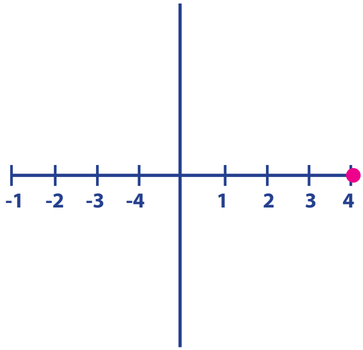




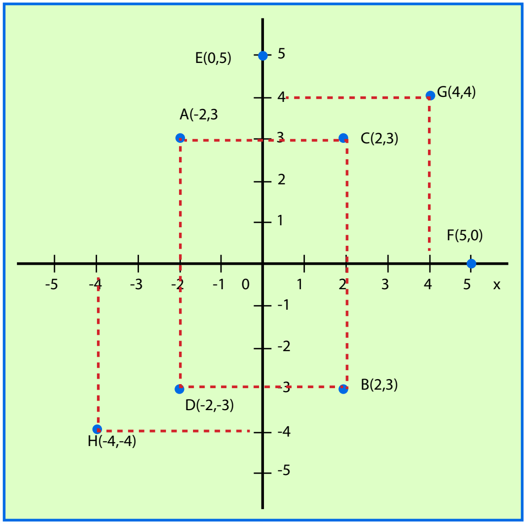
Las abscisas son nulas (x = 0) para todos los puntos contenidos en el eje Y. En lenguaje más sencillo, quiere decir que si el punto se encuentra justamente sobre el eje "y", no tienes que moverte ni un espacio sobre "x". Para encontrar el punto (0,3) te ubicas en el punto cero y te mueves 3 espacios o unidades caminando directamente sobre el eje "y".



Las ordenadas son nulas (y = 0) para todos los puntos contenidos en el eje X. Si el punto se encuentra justo sobre el eje "x", su valor en "y" será igual a cero. Ahora tienes que si un punto se encuentra justamente sobre el eje "x", no tienes que moverte ni un espacio sobre el eje "y". Para encontrar el punto (4,0) te ubicas en el punto cero y te mueves 4 espacios o unidades caminando directamente sobre el eje "x".



¿Ya te diste cuenta que no te he puesto ningún ejemplo con números negativos? ¿ni ejemplos en donde haya números positivos y negativos? Vamos a hacer algunos ejemplos en donde ocurran estas situaciones.



Vamos a encontrar juntos el punto B(2,-3). Dibujas tus ejes coordenados x,y y eliges una escala en donde puedas marcar dos rayitas sobre el eje positivo de las "x" y tres rayitas sobre el eje negativo de las "y". ¿Ya lo hiciste?, bien.... sigamos.

Ahora te mueves 2 unidades (rayitas) a la derecha sobre el eje "x" (a la derecha del cero siempre es positivo) y desde ese punto, bajas tres unidades paralelo al eje "y". Recuerda: del cero para abajo siempre los valores son negativos.

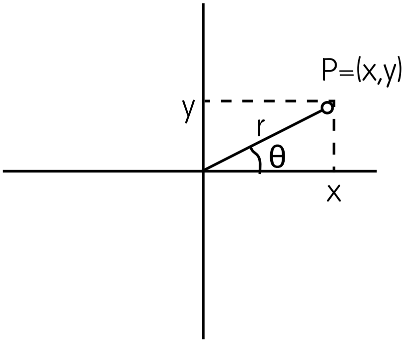
Encontremos el punto D(-2,-3). Ahora los dos valores son negativos, quiere decir que vas a moverte 2 unidades del cero para la izquierda sobre el eje de las "x" y desde ese punto 3 unidades hacia abajo paralelo al eje "y". ¿Lo lograste?

Localización de puntos en el sistema de coordenadas polares

Otra forma de representar puntos en el plano es empleando coordenadas polares.

¿Qué son las coordenadas polares? Hasta ahora nos hemos limitado a encontrar los puntos en el sistema de coordenadas cartesianas. Caminas unos pasitos para acá y otros para allá, dibujas el punto y asunto arreglado.

¿Qué pasa si trazamos una recta que vaya desde el punto (0,0) hasta llegar al lugar en donde dibujamos el punto buscado?



Las coordenadas polares son aquellas donde un punto cualquiera se ubica dando su distancia al centro de coordenadas (r en la gráfica) y el ángulo que forma con el eje positivo de las x (θ en la gráfica).

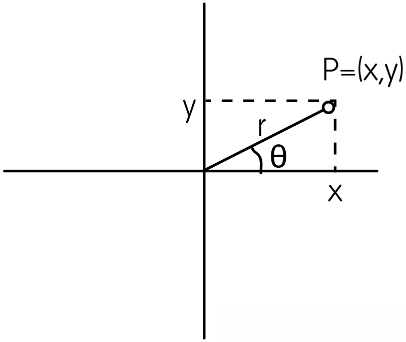
¿Y para qué me va a servir esto? Para poder ubicar puntos en cualquiera de las formas posibles. Sigamos con el ejemplo del tesoro, el mapa dice que se encuentra a una distancia de 2 metros de la raíz de un árbol, 40° al norte..... ¿Vas a dejar de encontrarlo por no saber usar coordenadas polares? Espero que hayas dicho que no.

¿Cómo hace el Facebook y otros programas para saber en dónde estás? ¿Has visto o usado un GPS (global position system) que permite determinar en todo el mundo la posición de un objeto, una persona o un vehículo con una precisión hasta de centímetros? Bueno, pues usan un sistema de triangulación con coordenadas polares y cartesianas.

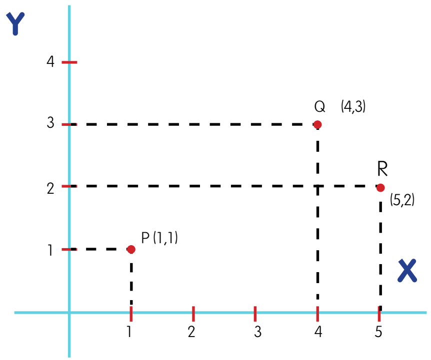
A todo punto P del plano con coordenadas rectangulares (x,y) podemos encontrarle las coordenadas polares que lo identifiquen; por ejemplo, el radio r de las coordenadas polares es igual a la distancia desde el punto (0,0) hasta P. Ya veremos cómo se calcula esa distancia.

r = distancia del origen de coordenadas (0,0) al punto

θ = ángulo desde el eje positivo del eje X al segmento que une el origen de coordenadas con P.



Antes de que te asustes, vamos a trabajar con un ejemplo, con el punto R (5,2). Tú ya sabes cómo ubicarlo en coordenadas cartesianas.



Tienes que para el punto R, x = 5, y = 2. Las ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangulares con las polares son las siguientes:

$$r = +\sqrt{(x^2 + y^2)} \qquad r = +\sqrt{(5^2 + 2^2)} \qquad r = 5.4$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{2}{5} \qquad \theta = 21.8^\circ$$

Estos valores quieren decir que si dibujas un eje de coordenadas cartesianas y quieres representar las coordenadas $r = 5.4$ y $\theta = 21.8^\circ$, usas un transportador y desde el punto (0,0) el origen, mides 21.8 grados y con ese ángulo de elevación, trazas una línea recta desde (0.0) que mida 5.4 unidades. Así de fácil.

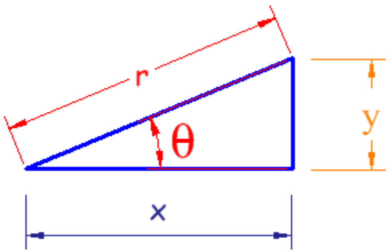
Ahora hagamos el proceso inverso, tienes las coordenadas polares y quieres saber su equivalente en coordenadas rectangulares.
Para el punto R, $r = 5.4$, $\theta = 21.8^\circ$, vamos a ver la relación de las coordenadas

polares con las rectangulares

$$x = r\cos(\theta) \qquad x = 5.4\cos(21.8^\circ) \qquad x = 5$$
$$y = r\,\text{sen}(\theta) \qquad y = 5.4\,\text{sen}(21.8^\circ) \qquad x = 2$$

¿Y cómo convertirlo? ¿De dónde sale todo esto?

Para convertir de un sistema a otro, se resuelve el triángulo:



Polares a rectangulares:

$\sin\theta = \frac{x}{r}$, despejando $y = r\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{y}{r}$, despejando $y = r\cos\theta$

Rectangulares a polares:

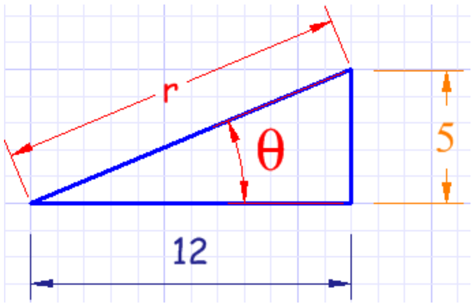
$$r = +\sqrt{x^2 y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Resolvamos algunos ejemplos.

De cartesianas a polares

Tienes un punto en coordenadas cartesianas (12,5) y lo quieres en coordenadas polares (r, θ), necesitas resolver un triángulo del que conoces dos lados.



Usamos el teorema de Pitágoras para calcular el lado largo (la hipotenusa):

$$r^2 = 12^2 + 5^2$$

$$r = \sqrt{x^2 y^2}$$

$$r = \sqrt{(12^2 + 5^2)}$$

$$r = \sqrt{(144 + 25)} = \sqrt{(169)} = 13$$

Usa la función tangente para calcular el ángulo:

$\mathrm{Tan}\,(\theta) = 5 / 12$

$\theta = \mathrm{atan}\ \ 5 / 12) = 22.6°$ Nota: atan = tangente inversa = $\tan^{-1}$

Así que las fórmulas para convertir coordenadas cartesianas (x, y) a polares (r, θ) son:

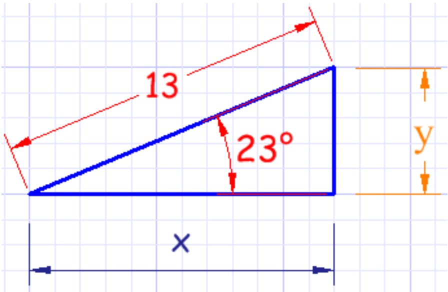
$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$\theta = \mathrm{atan}\,(y / x)$$

De polares a cartesianas

Tienes un punto en coordenadas polares (13, 23°) y lo quieres en coordenadas cartesianas (x, y) necesitas resolver un triángulo del que conoces el lado largo y un ángulo:

Ejemplo: ¿qué es (13, 23 °) en coordenadas cartesianas? r = 13, ángulo = 23°



Usamos la función coseno para x: $\cos(23°) = x / 13$

Cambiamos de orden y resolvemos: $x = 13 \times \cos(23°) = 13 \times 0.921 = 11.98$

Usamos la función seno para y: $\sin(23°) = y / 13$

Cambiamos de orden y resolvemos: $y = 13 \times \sin(23°) = 13 \times 0.391 = 5.08$

Así que las fórmulas para convertir coordenadas polares (r, θ) a cartesianas (x, y) son:

$x = r \times \cos(\theta)$

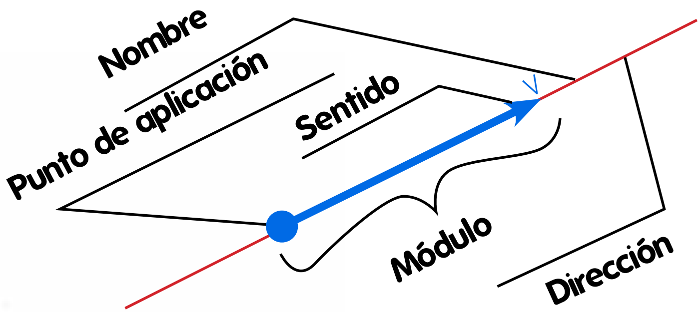
$y = r \times \sin(\theta)$

Concluyamos

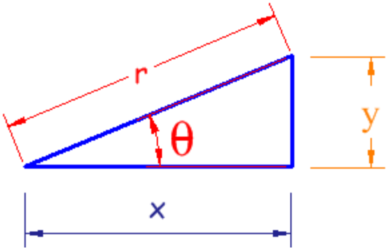
La forma de escribir los vectores y los escalares es la siguiente:

Cantidad	Símbolo/nomenclatura	Descripción
Escalar	**r, d, b, c,**	Una letra cursiva (usualmente minúscula)
Vectorial	**F** ó $\vec{F}$	Una letra negrita o con una pequeña flecha por encima

Estas son las partes de un vector y así se dibujan en el plano:



Ecuaciones para pasar coordenadas de un sistema a otro:



Polares a rectangulares:

$\sin\theta = \frac{x}{r}$, despejando $y = r \sin\theta$

$\cos\theta = \frac{y}{r}$, despejando $y = r \cos\theta$

Rectangulares a polares:

$$r = +\sqrt{x^2 y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Glosario

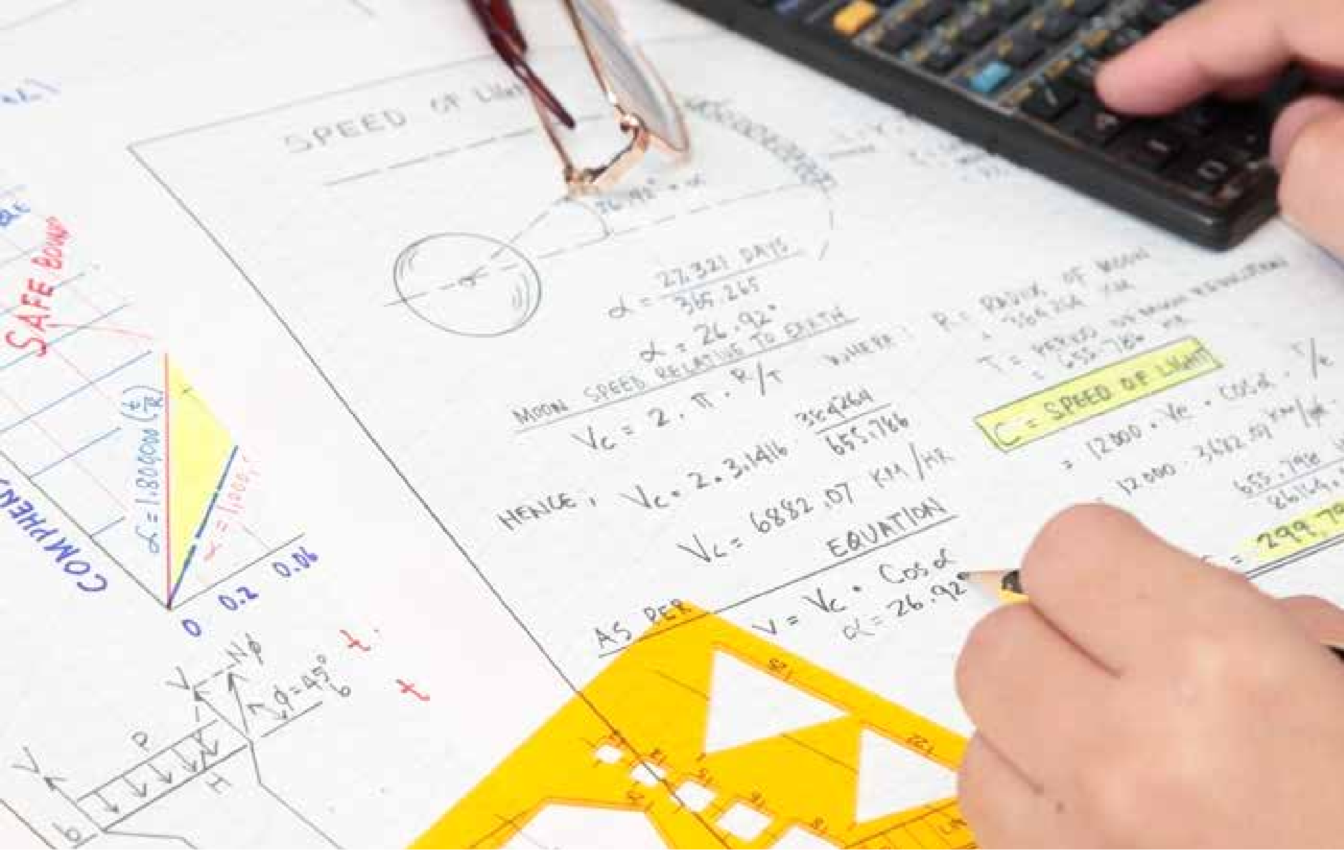
Dirección de un vector: Es la de la recta donde se ubica el vector.

Magnitud vectorial: Es aquella magnitud que se representa por medio de un vector.

Módulo de un vector: Es la cantidad del vector, representada por la longitud del mismo en la escala en que se lo construyó.

Sentido de un vector: Indica hacia dónde se dirige el vector en la dirección dada, representada por la punta de la flecha.

Vector: Es un segmento orientado, un segmento que además de longitud, posee dirección y sentido. Los vectores se representan por flechas, y se nombran con una letra con una flecha en su parte superior, o con las letras de su punto inicio y origen, con una flecha en su parte superior.



Por: Juan Piloña

Palabras: 2,692

Imágenes: Shutterstock

Fuentes:

Física 1 Paul W Zitzewitz, Robert F. Neff editorial McGraw-Hill segunda ediciòn.

Fundamentos de física Raymod A.Serway-Jerry S. Faughn Editorial Thomson.

Libro de texto: Física Conceptos y aplicaciones. Paul E. Tippens. Editorial McGraw-Hill, 6ta edición, 2001.