

Derivada de la composición de funciones (regla de la cadena)

Autor: William Barrios

Editor: Edufuturo

Palabras: 255

Fuente: <http://www.sangakoo.com/es/temas/derivada-de-la-composicion-de-funciones-regla-de-la-cadena>

Esta es la regla más importante ya que nos permitirá derivar cualquier tipo de función. Ésta, por muy complicada que sea, siempre podrá reducirse a las funciones elementales estudiadas hasta ahora mediante su composición.

Ejemplo

Ejemplo

$f(x) = \sin(ax + b)$ es una composición de las funciones elementales $g(x) = \sin x$ y $h(x) = ax + b$.

La composición de funciones nos dice que $f(x) = g(h(x))$, $f(x) = g(x)$ o $h(x)$ en otra notación, . Podríamos lógicamente hacer composiciones de tres funciones distintas, o de cuatro, o de cuantas funciones queramos.

En la siguiente tabla se presentan varias funciones construidas a partir de la composición de funciones elementales y sus derivadas.

Obsérvala atentamente e intenta deducir ahora la llamada regla de la cadena:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin 2x$	$\cos 2x \cdot 2$
e^{x^2}	$e^{x^2} \cdot 2x$
$(x^3 + x)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}(x^3 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 + 1)$
$\ln x^2$	$\frac{1}{x^2} \cdot 2x$
$g(h(x))$	?

Si lo has conseguido ¡felicidades! Comprueba tu resultado y avanza a los ejemplos. Si no has podido sacar la regla de la cadena mira de qué se trata y aplícala de nuevo a las funciones de la tabla para comprobar los resultados.

Regla de la cadena

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Ejemplo

Sea: $f(x) = \sin 2x$ Identificamos $g(x) = \sin x$ y $h(x) = 2x$, de tal manera que $f(x) = g(h(x)) = \sin 2x$.

De esta manera podemos aplicar la regla de la cadena, $f'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2 \cos 2x$

Ejemplo

Complicuemos un poco más nuestras funciones.

Let $f(x) = e^{x^3+2x+1}$.

Identificamos $g(x) = e^x$ y $h(x) = x^3 + 2x + 1$.

Apliquemos directamente la regla de la cadena, $f'(x) = e^{x^3+2x+1} \cdot (3x^2 + 2)$

Ejemplo

Sigamos complicándolo $f(x) = \ln(\sin x^2)$.

En este caso identificamos tres funciones:

$$g(x) = \ln x$$

$$h(x) = \sin x$$

$$t(x) = x^2$$

La regla de la cadena sigue siendo válida. Vayamos con el cálculo:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x = \frac{2x}{\tan x^2}$$

Ejemplo

Veamos, por curiosidad, como la regla del cociente es en realidad la misma que la del producto si utilizamos la regla de la cadena:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)(g(x))^{-1}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= f'(x)g(x)^{-1} + (-1)f(x)g(x)^{-2} = \\ &= f'(x)g(x)^{-1} \frac{g(x)}{g(x)} - f(x)g(x)^{-2} g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

Como se ve, esta regla ya sí permitirá derivar cualquier expresión. El desarrollo del cálculo puede ser más o menos largo -pues nuestra función puede ser una composición de dos, tres o hasta “muchas” funciones elementales, pero técnicamente no debe suponer un problema.

Cabe decir también que podemos mezclar funciones que requieran la regla de la cadena, la del producto, la del cociente al mismo tiempo. En estos casos el cálculo será engorroso, pero técnicamente igual a lo que hemos hecho hasta ahora.