

Sucesiones Aritméticas y Geométricas

Autor: William Barrios

Editor: Edufuturo

Palabras: 570

Fuente: <https://www.amschool.edu.sv/Paes/c10.htm>

SUCESIONES ARITMÉTICAS

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales: $\{1, 2, 3, \dots\}$. Una sucesión aritmética es aquella en la cual la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante. La fórmula para el término general de una sucesión aritmética es $an + b$, en donde a y b son constantes, y n es el número del término deseado. Específicamente, la constante a es la diferencia entre un término y el anterior.

Si sumamos n términos de la sucesión con término general $an + b$ obtendremos el valor:

$$(1) \quad (a + b) + (2a + b) + (3a + b) + \dots + (na + b) = \frac{a}{2}n(n + 1) + bn$$

EJEMPLO A:

Notemos la sucesión: 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26,...

La diferencia entre cualquier término y el anterior es 3, de modo que el término general sería $3n + b$.

Para encontrar el valor de b podemos utilizar el primer término, en donde $n = 1$.

De esta forma, $3(1) + b = 8$, y por lo tanto $b = 5$.

Por lo tanto, el término general de la sucesión es: $3n + 5$.

Si queremos encontrar el término 25 de la sucesión, sustituimos 25 en la anterior fórmula:

$3(25) + 5 = 80$. De modo que el término 25 de la sucesión tiene el valor de 80.

Si queremos encontrar la suma de los primeros 12 términos de esta sucesión, utilizamos la fórmula (1) arriba, con $a = 3$, $b = 5$ y $n = 12$:

$$\frac{3}{2}(12)(12 + 1) + 5(12) = 294$$

EJEMPLO B:

Notemos la sucesión: -13, -19, -25, -31, -37, -43, -49, -55,...

La diferencia entre cada término y el anterior es -6, de modo que el término general sería $-6n + b$.

Para encontrar el valor de b podemos utilizar el primer término, en donde $n = 1$.

De esta forma, $-6(1) + b = -13$, y por lo tanto $b = -7$.

Por lo tanto, el término general de la sucesión es: $-6n - 7$.

Si queremos encontrar el término 16 de la sucesión, sustituimos 16 en la anterior fórmula:

$-6(16) - 7 = -103$. De modo que el término 16 de la sucesión tiene el valor de -103.

Si queremos encontrar la suma de los primeros 30 términos de esta sucesión, utilizamos la fórmula (1) arriba, con $a = -6$, $b = -7$ y $n = 30$:

$$\frac{-6}{2}(30)(30 + 1) + (-7)(30) = -3000$$

SUCESIONES GEOMÉTRICAS

Recordamos que la fórmula para el término general de una sucesión geométrica es $a \cdot r^{n-1}$, en donde a y r son constantes, y n es el número del término deseado. Específicamente, la constante r es el cociente entre un término y el anterior.

Si sumamos n términos de la sucesión geométrica con término general $a \cdot r^{n-1}$ obtendremos el valor:

$$(1) \quad a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

EJEMPLO:

Al ejercitar un músculo, éste aumenta 3 milímetros el primer día. Además, el incremento de cada día es igual a 0.95 del incremento del día anterior. ¿Cuál será el incremento total al final del día 18?

Solución: Evidentemente, $r = 0.95$, de modo que el término general es: $a \cdot 0.95^{n-1}$. Para obtener a sustituimos $n = 1$ en el primer término: $a \cdot 0.95^{1-1} = 3$ $\Rightarrow a = 3$. Por tanto, el término general es: $3 \cdot 0.95^{n-1}$.

Para obtener el crecimiento total al final del día 18, sustituimos $a = 3$, $r = 0.95$ y $n = 18$ en la fórmula (1): $3(0.95^{18} - 1)/(0.95 - 1) = 36.17$ cm.